
Decadimento del pione carico

FEDERICO MANZONI

Indice

| | | |
|----------|---|----------|
| 1 | Introduzione | 5 |
| 1.1 | Branching ratio per pioni e kaoni | 5 |
| 2 | Calcolo della larghezza di decadimento | 7 |
| 2.1 | Calcolo dell'elemento di matrice | 7 |
| 2.2 | Calcolo dello spazio dello fasi | 9 |

Capitolo 1

Introduzione

In questo breve lavoro si vuole discutere il calcolo del rate di decadimento del pione carico in leptone e corrispondente antineutrino (o antileptone e corrispondente neutrino); il conto sarà esposto nel secondo capitolo. In questo capitolo introduttivo vogliamo riportare qualche numero, qualche branching ratio (per un dato canale di decadimento, indica la frazione di particelle che decadono seguendo quel particolare canale di decadimento rispetto al numero totale di particelle che decade in qualsiasi canale) nel caso di pioni e kaoni.

1.1 Branching ratio per pioni e kaoni

Riportiamo i branching ratio (BR) per pioni e kaoni, la relativa probabilità (solo i BR maggiori del $10^{-2}\%$ sono riportati) e il modo di decadimento. Cominciamo con i kaoni:

- $K^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu$ *Prob = 63,55% Leptonico*
- $K^+ \rightarrow \pi^+ + \pi^0$ *Prob = 20,66% Adronico*
- $K^+ \rightarrow \pi^+ + \pi^+ + \pi^-$ *Prob = 5,59% Adronico*
- $K^+ \rightarrow \pi^0 + e^+ + \nu_e$ *Prob = 5,07% Semileptonico*
- $K^+ \rightarrow \pi^0 + \mu^+ + \nu_\mu$ *Prob = 3,35% Semileptonico*
- $K^+ \rightarrow \pi^+ + \pi^0 + \pi^0$ *Prob = 1,76% Adronico*
- $K^- \rightarrow \mu^- + \nu_\mu$ *Prob = 63,55% Leptonico*
- $K^- \rightarrow \pi^- + \pi^0$ *Prob = 20,66% Adronico*
- $K^- \rightarrow \pi^- + \pi^- + \pi^+$ *Prob = 5,59% Adronico*
- $K^- \rightarrow \pi^0 + e^- + \nu_{\bar{e}}$ *Prob = 5,07% Semileptonico*
- $K^- \rightarrow \pi^0 + \mu^- + \nu_{\bar{\mu}}$ *Prob = 3,35% Semileptonico*
- $K^- \rightarrow \pi^- + \pi^0 + \pi^0$ *Prob = 1,76% Adronico*
- $K^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^-$ *Prob = 69,20% Adronico*
- $K^0 \rightarrow \pi^0 + \pi^0$ *Prob = 30,69 Adronico*

proseguiamo con i pioni:

- $\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu$ *Prob = 99,9877% Leptonico*
- $\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu + \gamma$ *Prob = 0,02% Semileptonico*
- $\pi^+ \rightarrow e^+ + \nu_e$ *Prob = 0,0123% Leptonico*
- $\pi^- \rightarrow \mu^- + \nu_{\bar{\mu}}$ *Prob = 99,9877% Leptonico*
- $\pi^- \rightarrow \mu^- + \nu_\mu + \gamma$ *Prob = 0,02% Semileptonico*
- $\pi^- \rightarrow e^- + \nu_{\bar{e}}$ *Prob = 0,0123% Leptonico*
- $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$ *Prob = 98,823% Nonleptonico*
- $\pi^0 \rightarrow \gamma + e^- + e^+$ *Prob = 1,174% Semileptonico*

Capitolo 2

Calcolo della larghezza di decadimento

Veniamo ora al calcolo della larghezza di decadimento del processo $\pi^+ \rightarrow l^+ + \nu_l$ (o equivalentemente potremmo considerare $\pi^- \rightarrow l^- + \nu_{\bar{l}}$) in cui l^+ rappresenta il generico antileptone e ν_l il neutrino associato. l non può essere il tauone dato che la sua massa è maggiore della massa del pione ($m_\tau = 1776 \text{ MeV} > 140 \text{ MeV} = m_\pi$). Ricordiamo, inoltre, che il contenuto in quark del pione carico positivo è $u\bar{d}$.

La hamiltoniana di interazione nella teoria di fermi è data da un accoppiamento di correnti leptonica e adronica

$$H_F = \frac{G_F}{\sqrt{2}} (\bar{\nu}_l \gamma^\mu (1 - \gamma^5) l) (\bar{d} \gamma_\mu (1 - \gamma^5) u), \quad (2.1)$$

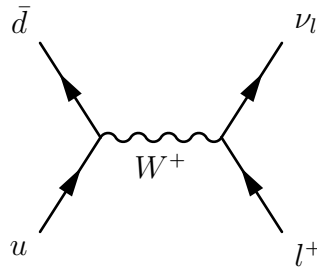
è da notare che il down fisico è una sovrapposizione lineare dei tre quark di tipo down della base elettrodebole (d, s, b); a rigore dovremmo considerare tre ampiezze, tuttavia la matrice U_{CKM} ci dice che il processo in cui non c'è cambio di famiglia è largamente il più probabile (rispettivamente si ha $U_{ud} \simeq 1$, $U_{us} \simeq 0,23$ e $U_{ub} \simeq 0,004$).

Il rate di decadimento sarà calcolato mediando sulle polarizzazioni iniziali (in questo caso nessuna, essendo il pione una particella a spin nullo) e sommando su quelle finali,

$$d\Gamma = \sum_{\text{pol. finali}} \frac{(2\pi)^4 \delta^4(p_\pi - p_l - p_{\nu_l})}{2E_\pi} |M_{fi}|^2 \frac{d^3 p_l}{(2\pi)^3 2E_l} \frac{d^3 p_{\nu_l}}{(2\pi)^3 2E_{\nu_l}}. \quad (2.2)$$

2.1 Calcolo dell'elemento di matrice

Il diagramma di Feynman corrispondente, nel MS, è



tuttavia nella teoria di Fermi, quindi per energie in gioco minori della massa del bosone W , l'interazione è puntuale. L'elemento di matrice, preso dalla teoria di Fermi, si ottiene mettendo H_F tra lo stato iniziale

$|\pi^+ \rangle$ e gli stati finali $\langle l^+ \nu_l |$, é

$$\begin{aligned} M_{fi} &= \langle l^+ \nu_l | H_F | \pi^+ \rangle = \frac{G_F}{\sqrt{2}} \langle l^+ \nu_l | (\bar{\nu}_l \gamma^\mu (1 - \gamma^5) l) | 0 \rangle \langle 0 | (\bar{d} \gamma_\mu (1 - \gamma^5) u) | \pi^+ \rangle = \\ &= \frac{G_F}{\sqrt{2}} \bar{u}(\nu_l) \gamma^\mu (1 - \gamma^5) v(l) f_\pi p_\mu^\pi; \end{aligned} \quad (2.3)$$

in cui abbiamo potuto parametrizzare l'elemento di matrice dei quark nella forma $f_\pi p_\mu^\pi$ per via del fatto che questo elemento di matrice deve essere un quadrivettore e il pione ha spin nullo, per cui lo stato é classificato solo dall'impulso del pione.

Il modulo quadro dell'elemento di matrice é dato da $|M_{fi}|^2 = M_{fi} M_{fi}^*$ e poichè siamo sommando sulle polarizzazioni possiamo utilizzare il trick di Casimir ossia il fatto di trasformare la somma di prodotti in tracce di prodotti di matrici (si utilizzano le formule relative alla somma sulle polarizzazioni degli spinori fondamentali), nel nostro caso

$$\sum_{s_1, s_2} [u^{s_1} \Gamma v^{s_2}] [u^{s_1} \Gamma v^{s_2}]^* = Tr[\Gamma(\not{p}_1 - m_1) \bar{\Gamma}(\not{p}_2 + m_2)],$$

in cui $\bar{\Gamma} = \gamma^0 \Gamma^\dagger \gamma^0$. Per quanto ci riguarda abbiamo (usando il fatto che γ^5 anticommuta con tutte le matrici γ e che $\gamma^\mu = \gamma^0 \gamma^{\mu\dagger} \gamma^0$)

$$\bar{\Gamma} = \gamma^0 [\gamma^\mu (1 - \gamma^5)]^\dagger \gamma^0 = \gamma^0 (1 - \gamma^5) \gamma^{\mu\dagger} \gamma^0 = \gamma^0 \gamma^{\mu\dagger} \gamma^0 (1 - \gamma^5) = \gamma^\mu (1 - \gamma^5), \quad (2.4)$$

e quindi

$$|M_{fi}|^2 = \frac{G_F^2 f_\pi^2}{2} p_\mu^\pi p_\nu^\pi Tr[\gamma^\mu (1 - \gamma^5) (\gamma_\alpha p_l^\alpha - m_l) \gamma^\nu (1 - \gamma^5) (\gamma_\beta p_{\nu_l}^\beta + m_{\nu_l})]. \quad (2.5)$$

Poniamo la massa del neutrino nulla, come prevede la teoria standard, per tanto la traccia diventa

$$\begin{aligned} &Tr[\gamma^\mu (1 - \gamma^5) (\gamma_\alpha p_l^\alpha - m_l) \gamma^\nu (1 - \gamma^5) (\gamma_\beta p_{\nu_l}^\beta)] = \\ &= Tr[\gamma^\mu (1 - \gamma^5) (\gamma_\alpha p_l^\alpha) \gamma^\nu (1 - \gamma^5) (\gamma_\beta p_{\nu_l}^\beta)] - Tr[\gamma^\mu (1 - \gamma^5) (m_l) \gamma^\nu (1 - \gamma^5) (\gamma_\beta p_{\nu_l}^\beta)] = \\ &= 2p_\alpha^l p_\beta^{\nu_l} Tr[\gamma^\mu \gamma^\alpha \gamma^\nu (1 - \gamma^5) \gamma^\beta] - m_l p_\beta^{\nu_l} Tr[\gamma^\mu \gamma^\nu (1 + \gamma^5) (1 - \gamma^5) \gamma^\beta] = \\ &= 2p_\alpha^l p_\beta^{\nu_l} (Tr[\gamma^\mu \gamma^\alpha \gamma^\nu \gamma^\beta] - Tr[\gamma^\mu \gamma^\alpha \gamma^\nu \gamma^5 \gamma^\beta]) = \\ &= 8p_\alpha^l p_\beta^{\nu_l} (g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} - g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} + g^{\mu\beta} g^{\alpha\nu} + i\epsilon^{\mu\alpha\nu\beta}) = \\ &= 8(p_l^\mu p_{\nu_l}^\nu - g^{\mu\nu} p_l \cdot p_{\nu_l} + p_l^\nu p_{\nu_l}^\mu), \end{aligned}$$

in cui abbiamo usato le proprietà della matrici gamma e il fatto che $(1 + \gamma^5)(1 - \gamma^5) = 0$. L'elemento di matrice modulo quadro prende la forma

$$\begin{aligned} |M_{fi}|^2 &= 4G_F^2 f_\pi^2 p_\mu^\pi p_\nu^\pi (p_l^\mu p_{\nu_l}^\nu - g^{\mu\nu} p_l \cdot p_{\nu_l} + p_l^\nu p_{\nu_l}^\mu) = \\ &= 4G_F^2 f_\pi^2 [(p_\pi \cdot p_l)(p_\pi \cdot p_{\nu_l}) - p_\pi^2 (p_l \cdot p_{\nu_l}) + (p_\pi \cdot p_l)(p_\pi \cdot p_{\nu_l})] = \\ &= 4G_F^2 f_\pi^2 [2(p_\pi \cdot p_l)(p_\pi \cdot p_{\nu_l}) - m_\pi^2 (p_l \cdot p_{\nu_l})], \end{aligned} \quad (2.6)$$

ponendoci nel sistema di riferimento del pione (possiamo farlo perchè, per fortuna, gli elementi di matrice in fisica delle particelle sono Lorentz-invarianti) e usando il fatto che $p_\pi = p_l + p_{\nu_l}$, abbiamo $p_l \cdot p_{\nu_l} = (p_\pi - p_{\nu_l}) \cdot p_{\nu_l} = p_\pi \cdot p_{\nu_l} = m_\pi E_{\nu_l}$ e $p_l \cdot p_{\nu_l} = p_l \cdot (p_\pi - p_l) = p_l \cdot p_\pi - p_l^2 = m_l m_\pi - m_l^2$, per cui

$$\begin{aligned} |M_{fi}|^2 &= 4G_F^2 f_\pi^2 [2m_\pi^2 m_l E_{\nu_l} - m_\pi^3 E_{\nu_l}] = 4G_F^2 f_\pi^2 E_{\nu_l} m_\pi [2m_\pi m_l - m_\pi^2] = \\ &= 4G_F^2 f_\pi^2 E_{\nu_l} m_\pi [2m_\pi m_l - p_\pi^2] = 4G_F^2 f_\pi^2 E_{\nu_l} m_\pi [2m_\pi m_l - m_l^2 - 2p_l \cdot p_{\nu_l}] = \\ &= 4G_F^2 f_\pi^2 E_{\nu_l} m_\pi [2m_\pi m_l - m_l^2 - 2m_\pi m_l + 2m_l^2] = 4G_F^2 f_\pi^2 E_{\nu_l} m_\pi m_l^2. \end{aligned} \quad (2.7)$$

L'equazione (2.7) ci dice che il modulo quadro dell'elemento di matrice è proporzionale alla massa dell'antileptone per cui se questo fosse a massa nulla il processo sarebbe vietato; il motivo risiede nel fatto che la corrente carica debole contiene il campo left, nel limite di massa nulla un campo left è autostato esatto dell'elicità e crea una particella con elicità $h = -\frac{1}{2}$ ed una antiparticella con elicità $h = +\frac{1}{2}$. Essendo il neutrino, nel MS, a massa nulla, esso ha elicità negativa e la conservazione del momento angolare, assieme al fatto che il pione ha spin nullo, vorrebbe che anche l'antileptone carico abbia elicità negativa; ma non può essere dato che nel limite di massa nulla il campo left del leptone carico deve creare un antileptone con elicità positiva. In conclusione, nel limite di massa nulla del leptone carico, il processo è proibito per la conservazione del momento angolare.

2.2 Calcolo dello spazio delle fasi

Proseguiamo col calcolo dello spazio delle fasi, il rate di decadimento è ora dato, nel sistema di riferimento del pione, da

$$\begin{aligned} d\Gamma &= \frac{(2\pi)^4 \delta^4(p_\pi - p_l - p_{\nu_l})}{2m_\pi} 4G_F^2 f_\pi^2 E_{\nu_l} m_\pi m_l^2 \frac{d^3 p_l}{(2\pi)^3 2E_l} \frac{d^3 p_{\nu_l}}{(2\pi)^3 2E_{\nu_l}} = \\ &= \frac{G_F^2 f_\pi^2 m_l^2}{2(2\pi)^2} \delta^4(p_\pi - p_l - p_{\nu_l}) \frac{d^3 p_l}{E_l} d^3 p_{\nu_l}, \end{aligned} \quad (2.8)$$

utilizziamo la delta di Dirac $\delta^3(-\mathbf{p}_l - \mathbf{p}_{\nu_l})$ per integrare nelle tre variabili del neutrino ottenendo

$$d\Gamma = \frac{G_F^2 f_\pi^2 m_l^2}{8\pi^2} \delta^{(1)}(m_\pi - E_l - E_{\nu_l}) \frac{d^3 p_l}{E_l} = \frac{G_F^2 f_\pi^2 m_l^2}{8\pi^2} \delta^{(1)}(m_\pi - E_l - E_{\nu_l}) \frac{p_l^2 dp_l d\Omega}{E_l}. \quad (2.9)$$

Usando $p_l dp_l = E_l dE_l$, $p_l = \sqrt{E_l^2 - m_l^2}$ e integrando sull'angolo solido (non c'è dipendenza) si ottiene. Si noti che la delta fissa $|\mathbf{p}_l| = |\mathbf{p}_{\nu_l}|$ e dato che il neutrino ha massa nulla si deve avere $|\mathbf{p}_{\nu_l}| = E_{\nu_l}$ e, conseguentemente, $|\mathbf{p}_l| = E_{\nu_l}$, da cui

$$\begin{aligned} d\Gamma &= \frac{G_F^2 f_\pi^2 m_l^2}{2\pi} \delta^{(1)}(E_l + |\mathbf{p}_l| - m_\pi) \frac{p_l p_l dp_l}{E_l} = \frac{G_F^2 f_\pi^2 m_l^2}{2\pi} \delta^{(1)}(E_l + |\mathbf{p}_l| - m_\pi) \frac{\sqrt{E_l^2 - m_l^2} E_l dE_l}{E_l} = \\ &= \frac{G_F^2 f_\pi^2 m_l^2}{2\pi} \delta^{(1)}\left(E_l + \sqrt{E_l^2 - m_l^2} - m_\pi\right) \sqrt{E_l^2 - m_l^2} dE_l \end{aligned} \quad (2.10)$$

La delta possiede l'unico zero in

$$E_l + \sqrt{E_l^2 - m_l^2} - m_\pi = 0 \Rightarrow E_l^2 + m_\pi^2 + 2E_l m_\pi = E_l^2 - m_l^2 \Rightarrow E_l = \frac{m_l^2 + m_\pi^2}{2m_\pi} \doteq E_0,$$

ed usando la nota relazione $\delta(f(x)) = \sum_i \frac{\delta(x - (x_0)_i)}{f'((x_0)_i)}$ otteniamo

$$d\Gamma = \frac{G_F^2 f_\pi^2 m_l^2}{2\pi} \sqrt{E_l^2 - m_l^2} \delta^{(1)}(E_l - E_0) \frac{1}{1 + \frac{E_0}{\sqrt{E_0^2 - m_l^2}}} \Rightarrow \Gamma = \frac{G_F^2 f_\pi^2 m_l^2}{2\pi} \sqrt{E_0^2 - m_l^2} \frac{1}{1 + \frac{E_0}{\sqrt{E_0^2 - m_l^2}}}. \quad (2.11)$$

Per semplificare ulteriormente ed esprimere il rate di decadimento in termini delle masse delle particelle in gioco, ci concentriamo sul termine contenente E_0 , notando preventivamente che

$$E_0^2 - m_l^2 = \frac{m_l^4 + m_\pi^4 + 2m_l^2 m_\pi^2 - 4m_\pi^2 m_l^2}{4m_\pi^2} = \left(\frac{m_\pi^2 - m_l^2}{2m_\pi}\right)^2,$$

da cui

$$\begin{aligned}
\sqrt{E_0^2 - m_l^2} \frac{1}{1 + \frac{E_0}{\sqrt{E_0^2 - m_l^2}}} &= \sqrt{E_0^2 - m_l^2} \frac{\sqrt{E_0^2 - m_l^2}}{\sqrt{E_0^2 - m_l^2} + E_0} = \frac{E_0^2 - m_l^2}{\sqrt{E_0^2 - m_l^2} + E_0} = \\
&= \frac{\left(\frac{m_\pi^2 - m_l^2}{2m_\pi}\right)^2}{\frac{m_\pi^2 - m_l^2}{2m_\pi} + \frac{m_l^2 + m_\pi^2}{2m_\pi}} = \frac{\frac{(m_\pi^2 - m_l^2)^2}{4m_\pi^2}}{m_\pi} = \frac{1}{4m_\pi^3} (m_\pi^2 - m_l^2)^2 = \frac{1}{4m_\pi^3} \left[m_\pi^2 \left(1 - \frac{m_l^2}{m_\pi^2} \right) \right]^2 = \frac{m_\pi}{4} \left(1 - \frac{m_l^2}{m_\pi^2} \right)^2,
\end{aligned}$$

che inserito nella (2.11) ci restituisce finalmente

$$\Gamma = \frac{G_F^2 f_\pi^2 m_l^2 m_\pi}{8\pi} \left(1 - \frac{m_l^2}{m_\pi^2} \right)^2. \tag{2.12}$$