

Domande e risposte di Relatività Generale

Federico Manzoni

Indice

- 1 Mostrare che, note la metrica $g_{\mu\nu}$ e i coefficienti della connessione affine $\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}$ in un punto, è sempre possibile trovare un sistema di coordinate localmente minkowskiane 3
- 2 Dimostrare che il vettore tangente a una geodetica, quando trasportato parallelamente lungo la geodetica, rimane parallelo a sè stesso 3
- 3 Ricavare la relazione che esiste tra i simboli di Christoffel e il tensore metrico 4
- 4 Ricavare il tensore di Riemann calcolando come varia un vettore quando lo si trasporta parallelamente lungo un cammino chiuso infinitesimale. Dimostrare che l'oggetto così ottenuto è un tensore 4
- 5 Dimostrare che il tensore di Riemann dà il commutatore delle derivate covarianti 7
- 6 Dimostrare le identità di Bianchi ricordando che in un riferimento localmente inerziale il tensore di Riemann diventa $R_{\alpha\beta\mu\nu} = \frac{1}{2}[g_{\alpha\nu,\beta\mu} - g_{\alpha\mu,\beta\nu} + g_{\beta\mu,\alpha\nu} - g_{\beta\nu,\alpha\mu}]$ 7
- 7 Definire il tensore energia-impulso per un sistema di particelle non interagenti in Relatività Speciale, discutere il significato delle componenti e mostrare che è un tensore 8
- 8 Dimostrare che in Relatività Speciale il tensore energia-impulso per un sistema di particelle soddisfa la legge di conservazione $T_{;\beta}^{\alpha\beta} = 0$ 9
- 9 Dato il generico tensore energia-impulso $T^{\alpha\beta}$ spiegare perchè l'equazione $T_{;\beta}^{\alpha\beta} = 0$, valida in spaziotempo piatto è una legge di conservazione, mentre $T_{;\beta}^{\alpha\beta} = 0$, valida in spaziotempo curvo, non lo è 10
- 10 Discutere l'equazione delle geodetiche nel limite newtoniano 11
- 11 Ricavare le equazioni di Einstein sapendo che, nel limite newtoniano, le equazioni delle geodetiche mostrano che $g_{00} = -(1 + 2\frac{\Phi}{c^2})$, in cui Φ è il potenziale newtoniano soluzione dell'equazione di Laplace $\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho$ 12
- 12 Discutere il problema dell'invarianza di gauge delle equazioni di Einstein 13
- 13 Ricavare l'equazione di Killing e mostrare che si può scrivere nella forma $\xi_{\mu;\nu} + \xi_{\nu;\mu} = 0$. Mostrare che se lo spaziotempo ammette un campo di vettori di Killing, si possono scegliere le coordinate in modo da sfruttare le simmetrie ad essi associate. 14
- 14 Mostrare che se una metrica ammette dei vettori di Killing si possono associare quantità conservate al moto geodetico e al tensore energia-impulso 15
- 15 Definire cos'è un campo vettoriale ortogonale a una famiglia di ipersuperfici e mostrare come l'esistenza di un campo vettoriale che goda di questa proprietà consente di semplificare la forma del tensore metrico 17
- 16 Ricavare la forma generale che deve avere la metrica che descrive uno spazio-tempo statico e a simmetria sferica 17

- 17 Data la metrica che descrive uno spaziotempo statico e a simmetria sferica $ds^2 = -e^{2\nu(r)}(dx^0)^2 + e^{2\lambda(r)}(dr)^2 + r^2[(d\theta)^2 + \sin^2(\theta)(d\phi)^2]$, e date le equazioni di Einstein che deve soddisfare $E_{00} = \frac{1}{r^2}e^{2\nu} \frac{d}{dr} [r(1 - e^{-2\lambda})]$, $E_{rr} = -\frac{1}{r^2}e^{2\lambda}[(1 - e^{-2\lambda})] + \frac{2}{r}\nu_{,r}$, $E_{\theta\theta} = r^2e^{-2\lambda}[\nu_{,rr} + \nu_{,r}^2 + \frac{\nu_{,r}}{r} - \nu_{,r}\lambda_{,r} - \frac{\lambda_{,r}}{r}]$, $E_{\phi\phi} = \sin^2(\theta)E_{\theta\theta}$ ricavare la soluzione di Schwarzschild. 18
- 18 Discutere la natura delle ipersuperfici in Relatività Generale e, data la metrica di Schwarzschild $ds^2 = -\left(1 - \frac{2m}{r}\right)dt^2 + \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{2m}{r}\right)} + r^2d\theta^2 + r^2\sin^2(\theta)d\phi^2$. Spiegare perchè la superficie $r = 2m$ è un orizzonte degli eventi 19
- 19 Derivare e discutere il redshift gravitazionale delle linee spettrali. 23
- 20 Data la metrica di Schwarzschild $ds^2 = -(1 - \frac{2m}{r})dt^2 + \frac{dr^2}{(1 - \frac{2m}{r})} + r^2d\theta^2 + r^2\sin^2(\theta)d\phi^2$ derivare le equazioni delle geodetiche per particelle di massa nulla, e discutere i vari tipi di orbita. 24
- 21 Data la metrica di Schwarzschild $ds^2 = -(1 - \frac{2m}{r})dt^2 + \frac{dr^2}{(1 - \frac{2m}{r})} + r^2d\theta^2 + r^2\sin^2(\theta)d\phi^2$ derivare le equazioni delle geodetiche per particelle massive e discutere i vari tipi di orbita. 27
- 22 Utilizzando le equazioni delle geodetiche per particelle di massa nulla nella metrica di Schwarzschild $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\dot{t} = \frac{E}{(1 - \frac{2m}{r})}$, $\dot{\phi} = \frac{L}{r^2}$, $\dot{r}^2 = E^2 - \frac{L^2}{r^2}(1 - \frac{2m}{r})$ derivare e discutere il fenomeno della deflessione della luce nelle vicinanze di un corpo massivo. 28
- 23 Utilizzando le equazioni delle geodetiche per particelle di massa nulla nella metrica di Schwarzschild $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\dot{t} = \frac{E}{(1 - \frac{2m}{r})}$, $\dot{\phi} = \frac{L}{r^2}$, $\dot{r}^2 = E^2 - (1 + \frac{L^2}{r^2})(1 - \frac{2m}{r})$ derivare e discutere il fenomeno della precessione del perielio. 31
- 24 Descrivere il moto di una particella massiva che cada radialmente in un buco nero di Schwarzschild. Discutere il problema sia dal punto di vista di un osservatore all'infinito, che di un osservatore solidale con la particella. 33
- 25 Ricavare l'equazione della deviazione geodetica. 34
- 26 Mostrare che le equazioni di Einstein $\square_P h_{\mu\nu} - \left[\frac{\partial^2}{\partial x^\lambda \partial x^\mu} h_\nu^\lambda + \frac{\partial^2}{\partial x^\lambda \partial x^\nu} h_\mu^\lambda - \frac{\partial^2}{\partial x^\mu \partial x^\nu} h_\lambda^\lambda \right] = -\frac{16\pi G}{c^4} \left(T_{\mu\nu}^{(pert)} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T_\lambda^\lambda \right)$ per la metrica $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ con $|h_{\mu\nu}| \ll 1$, con un'opportuna scelta di gauge e ponendo $\bar{h}_{\mu\nu} \equiv h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} h_\lambda^\lambda$, si possono scrivere nella forma $\square_P \bar{h}_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}^{(pert)}$ accompagnate da $\frac{\partial}{\partial x^\mu} \bar{h}_\nu^\mu = 0$. 36
- 27 Si dimostri che le equazioni delle onde gravitazionali nel vuoto ammettono soluzioni di onda piana. Scegliendo la gauge in maniera opportuna (spiegando anche che, con tale scelta, la condizione di gauge armonica rimane soddisfatta), si dimostri che le onde gravitazionali sono trasverse, a traccia nulla e hanno due soli stati di polarizzazione. 37
- 28 Discutere le conseguenze dell'equazione della deviazione geodetica su un sistema di particelle in presenza di un'onda gravitazionale piana del tipo $h_{\mu\nu}^{TT} = \text{diag}(0, 0, h_{yy}, h_{zz})$ con $h_{yy}^{TT} = -h_{zz}^{TT} = 2A_+ \cos(\omega(t - \frac{x}{c}))$. Si ricordi che $R_{iklm} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 h_{im}}{\partial x^k \partial x^l} + \frac{\partial^2 h_{kl}}{\partial x^i \partial x^m} - \frac{\partial^2 h_{il}}{\partial x^k \partial x^m} - \frac{\partial^2 h_{km}}{\partial x^i \partial x^l} \right) + O(h_{\mu\nu}^2)$ 39
- 29 Discutere le conseguenze dell'equazione della deviazione geodetica su un sistema di particelle in presenza di un'onda gravitazionale piana del tipo in cui solo le componenti h_{yz} e h_{zy} sono non nulle con $h_{yz}^{TT} = h_{zy}^{TT} = 2A_\times \cos(\omega(t - \frac{x}{c}))$. Si ricordi che $R_{iklm} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 h_{im}}{\partial x^k \partial x^l} + \frac{\partial^2 h_{kl}}{\partial x^i \partial x^m} - \frac{\partial^2 h_{il}}{\partial x^k \partial x^m} - \frac{\partial^2 h_{km}}{\partial x^i \partial x^l} \right) + O(h_{\mu\nu}^2)$ 41

1 Mostrare che, note la metrica $g_{\mu\nu}$ e i coefficienti della connessione affine $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$ in un punto, è sempre possibile trovare un sistema di coordinate localmente minkowskiane

Preso un sistema di coordinate $\xi^\alpha(x)$ minkowskiano lo espandiamo al secondo ordine attorno ad un generico punto X

$$\xi^\alpha(X) + \left. \frac{\partial \xi^\alpha(x)}{\partial x^\lambda} \right|_{x=X} (x^\lambda - X^\lambda) + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 \xi^\alpha(x)}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \right|_{x=X} (x^\nu - X^\nu)(x^\mu - X^\mu),$$

notiamo che

$$\frac{\partial \xi(x)^\alpha}{\partial x^\lambda} \Gamma_{\nu\mu}^\lambda = \frac{\partial \xi(x)^\alpha}{\partial x^\lambda} \frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi(x)^\beta} \frac{\partial^2 \xi(x)^\beta}{\partial x^\nu \partial x^\mu} = \delta_\beta^\alpha \frac{\partial^2 \xi(x)^\beta}{\partial x^\nu \partial x^\mu} = \frac{\partial^2 \xi(x)^\alpha}{\partial x^\nu \partial x^\mu},$$

quindi

$$\xi^\alpha(X) + \left. \frac{\partial \xi^\alpha(x)}{\partial x^\lambda} \right|_{x=X} (x^\lambda - X^\lambda) + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial \xi(x)^\alpha}{\partial x^\lambda} \Gamma_{\nu\mu}^\lambda \right|_{x=X} (x^\nu - X^\nu)(x^\mu - X^\mu).$$

Sappiamo che cambiando sistema di coordinate, ad esempio passando da un sistema minkowskiano ad uno non minkowskiano la metrica si trasforma come

$$g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial \xi^\alpha(x)}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta(x)}{\partial x^\nu} \Rightarrow g_{\mu\nu}(X) = \eta_{\alpha\beta} \left. \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \right|_{x=X} \left. \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu} \right|_{x=X},$$

quindi dall'equazione sopra siamo in grado di ricavare i termini $\left. \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu} \right|_{x=X}$; questo implica che conoscendo la metrica ed i simboli di Christoffel siamo sempre in grado di determinare un sistema di coordinate localmente minkowskiane, ovviamente tale sistema è una buona approssimazione solo in un intorno infinitesimo (del secondo ordine) del punto X . Notiamo che lo sviluppo non è univocamente determinato a causa dell'ambiguità nelle costanti $\xi^\alpha(X)$; questo è dovuto al fatto che una trasformazione di Poincaré è una simmetria dello spazio-tempo che lascia invariata la metrica, per cui possiamo fare una trasformazione di Poincaré del LIF appena determinato e questa dovrà produrre ancora un LIF. Quanto trovato matematicamente è anche fisicamente intuibile, infatti per il principio di equivalenza possiamo sempre trovare un sistema in cui le l'interazione gravitazionale è eliminabile (versione forte, la versione debole asserisce che $m_{in} = m_{grav}$) e le leggi della RG si riducono a quelle della RS quindi è sempre possibile trovare un LIF.

2 Dimostrare che il vettore tangente a una geodetica, quando trasportato parallelamente lungo la geodetica, rimane parallelo a sè stesso

Ricordiamo, prima di tutto, che il concetto di trasporto parallelo è necessario per poter confrontare ed applicare il calcolo differenziale a vettori che giacciono su spazi tangenti diversi (quindi vettori su varietà applicati in punti diversi). Il concetto di trasporto parallelo consiste, in sintesi, nel trasportare un vettore lungo una curva nella direzione indicata in ogni punto dal vettore tangente alla curva stessa. Per quanto riguarda la domanda, dobbiamo quindi mostrare che il vettore tangente alla geodetica quando trasportato parallelamente rimane il vettore tangente alla geodetica (che quando trasportato parallelamente rimane parallelo a sè stesso, nel senso della relatività generale).

Consideriamo una linea di universo in un LIF, parametrizzata dal parametro q , in questo riferimento si ha che la quadriaccelerazione è nulla (la particella è soggetta solo al campo gravitazionale),

$$\frac{dU^\alpha}{dq} = \frac{dx^\mu}{dq} \frac{\partial U^\alpha}{\partial x^\mu} = U^\mu U^\alpha_{;\mu} = 0.$$

Nel LIF derivata ordinaria e covariante coincidono, $U^\mu U^\alpha_{;\mu} = U^\mu U^\alpha_{,\mu}$, ma quest'ultima è un' equazione tensoriale valida in ogni sistema di riferimento, da cui

$$U^\mu U^\alpha_{;\mu} = U^\mu U^\alpha_{,\mu} + U^\mu \Gamma_{k\mu}^\alpha U^k = 0.$$

Quest'ultima equazione è stata ottenuta immaginando che la geodetica fosse la linea di universo di una particella massiva, ma l'equazione ha una validità generale (vale per geodetiche di tipo spazio, luce e tempo), l'unica differenza sta nel fatto che nel caso di geodetiche timelike è possibile scegliere come parametro affine il tempo proprio. Sostituendo $U^\alpha = \frac{dx^\alpha}{dq}$ nella equazione precedente si ottiene

$$\frac{dx^\mu}{dq} \frac{dx^\alpha}{dq dx^\mu} + \Gamma_{k\mu}^\alpha \frac{dx^\mu}{dq} \frac{dx^k}{dq} = \frac{d^2 x^\alpha}{dq^2} + \Gamma_{k\mu}^\alpha \frac{dx^\mu}{dq} \frac{dx^k}{dq} = 0$$

che sono proprio le equazioni delle geodetiche. Quindi le equazioni delle geodetiche sono equivalenti all'equazione del trasporto parallelo del vettore tangente alla geodetica nella direzione individuata dallo stesso; in altre parole le

geodetiche sono quelle curve lungo le quali il trasporto parallelo del vettore tangente produce un altro vettore tangente alla geodetica stessa (ovviamente in un punto differente). Notiamo che il parametro q è arbitrario, ma che deve far parte dell'insieme dei parametri affini (legati tra loro da una relazione lineare, $q' = aq + b$) se vogliamo che le equazioni delle geodetiche, dopo un cambio di parametrizzazione siano valide nella forma di cui sopra.

3 Ricavare la relazione che esiste tra i simboli di Christoffel e il tensore metrico

Per prima cosa due parole sulla connessione di Levi-Civita. Volendo nella relatività generale dare importanza centrale al tensore metrico, necessitiamo di una struttura matematica che consenta questa centralità (ossia il poter definire le quantità come la derivata covariante o le geodetiche solo tramite il tensore metrico). Tra tutte le possibili connessioni delle varietà riemanniane l'unica che porta a compimento il nostro intento è proprio la connessione di Levi-Civita, l'unica senza torsione ($T_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k = 0$) e che preserva la metrica ($g_{\mu\nu;\alpha} = 0$).

Proseguiamo col mostrare che la derivata covariante del tensore metrico è identicamente nulla (senza assumere che la connessione sia di Levi-Civita). Per il principio di equivalenza è sempre possibile scegliere un LIF in cui il tensore metrico di Riemann si riduce al tensore metrico di Minkowski. Nel LIF i vettori di base sono costanti (non dipendono da punto in questione e quindi i simboli della connessione sono tutti nulli) e il tensore metrico non dipende dal generico punto dello spazio-tempo, quindi si ha

$$g_{\mu\nu,\beta} = 0 \Rightarrow g_{\mu\nu;\beta} = g_{\mu\nu,\beta} - \Gamma_{\mu\beta}^k g_{k\nu} - \Gamma_{\beta\nu}^k g_{\mu k} = 0.$$

Permutando ciclicamente gli indici dell'equazione sopra si ottengono le tre equazioni sotto

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu,\beta} - \Gamma_{\mu\beta}^k g_{k\nu} - \Gamma_{\beta\nu}^k g_{\mu k} &= 0 \text{ (0 permutazioni),} \\ g_{\beta\mu,\nu} - \Gamma_{\nu\mu}^k g_{k\beta} - \Gamma_{\mu\beta}^k g_{\nu k} &= 0 \text{ (1 permutazione),} \\ g_{\nu\beta,\mu} - \Gamma_{\beta\nu}^k g_{k\mu} - \Gamma_{\nu\mu}^k g_{\beta k} &= 0 \text{ (2 permutazioni).} \end{aligned}$$

Sottraendo le ultime due alla prima

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu,\beta} - \Gamma_{\mu\beta}^k g_{k\nu} - \Gamma_{\beta\nu}^k g_{\mu k} - g_{\beta\mu,\nu} + \Gamma_{\nu\mu}^k g_{k\beta} + \Gamma_{\mu\beta}^k g_{\nu k} - g_{\nu\beta,\mu} + \Gamma_{\beta\nu}^k g_{k\mu} + \Gamma_{\nu\mu}^k g_{\beta k} &= \\ = g_{\mu\nu,\beta} + 2\Gamma_{\mu\nu}^k g_{\beta k} - g_{\beta\mu,\nu} - g_{\nu\beta,\mu} &= 0 \Rightarrow \frac{1}{2}(-g_{\mu\nu,\beta} + g_{\beta\mu,\nu} + g_{\nu\beta,\mu}) = \Gamma_{\mu\nu}^k g_{\beta k}; \end{aligned}$$

contraendo l'equazione sopra con $g^{\beta\gamma}$ per esplicitare il simbolo di Christoffel si ottiene

$$\frac{1}{2}g^{\beta\gamma}(-g_{\mu\nu,\beta} + g_{\beta\mu,\nu} + g_{\nu\beta,\mu}) = \Gamma_{\mu\nu}^k g_{\beta k} g^{\beta\gamma} \Rightarrow \frac{1}{2}g^{\beta\gamma}(-g_{\mu\nu,\beta} + g_{\beta\mu,\nu} + g_{\nu\beta,\mu}) = \Gamma_{\mu\nu}^k \delta_k^\gamma = \Gamma_{\mu\nu}^\gamma.$$

In definitiva abbiamo ottenuto che

$$\Gamma_{\mu\nu}^\gamma = \frac{1}{2}g^{\beta\gamma}(-g_{\mu\nu,\beta} + g_{\beta\mu,\nu} + g_{\nu\beta,\mu}). \tag{1}$$

Nel derivare l'equazione (1) abbiamo sfruttato la simmetrie del tensore metrico. La relazione trovata esprime i simboli di Christoffel solo in funzione delle derivate prime della metrica, inoltre essa definisce in maniera univoca la connessione e l'unica connessione in grado di produrre dei simboli di Christoffel esprimibili in questo modo è la connessione canonica di Levi-Civita.

Notiamo, infine, che essendo nel LIF i simboli tutti nulli questi non possono essere dei tensori perchè altrimenti sarebbero nulli in tutti i sistemi di riferimento.

4 Ricavare il tensore di Riemann calcolando come varia un vettore quando lo si trasporta parallelamente lungo un cammino chiuso infinitesimale. Dimostrare che l'oggetto così ottenuto è un tensore

L'approccio formale di Riemann è molto lungo e computazionalmente dispendioso (ma sicuramente più rigoroso) dell'approccio dovuto a Levi-Civita per ricavare il tensore di Riemann. L'approccio formale si basa sull'idea che l'informazione riguardo la curvatura sia contenuta nelle derivate seconde della metrica e quindi nelle derivate prime dei simboli della connessione affine; poichè quest'ultimi non sono dei tensori (e noi vogliamo un tensore) dobbiamo isolare ed eliminare la parte che non trasforma come un tensore dei simboli di Christoffel, nel fare questo si ottiene il tensore di curvatura.

Veniamo ora all'approccio di Levi-Civita e consideriamo un piccolo loop infinitesimo lungo il quale trasportare parallelamente un generico tensore. Il loop è raffigurato nella figura sottostante.

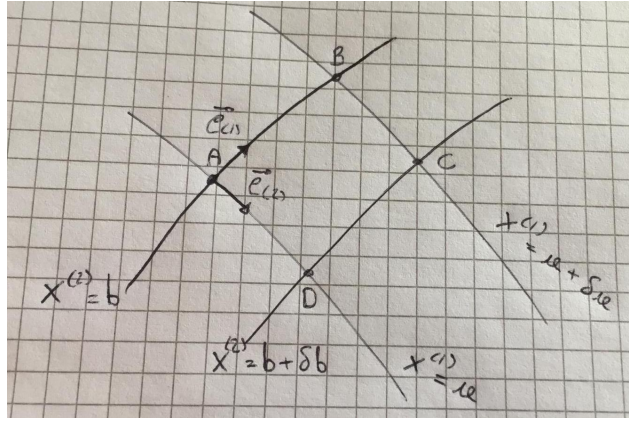


Figura 1: Loop infinitesimo sul quale trasportare un generico vettore \vec{V} . Notiamo che $A = (a, b)$, $B = (a + \delta a, b)$, $C = (a + \delta a, b + \delta b)$ e $D = (a, b + \delta b)$

Eseguiamo il trasporto parallelo lungo i quattro percorsi AB , BC , CD e DA nelle direzioni dei vettori di base ricordando che il vettore di base $\vec{e}_{(1)}$ ha solo la componente 1 non nulla mentre il vettore di base $\vec{e}_{(2)}$ ha solo la componente 2 non nulla. (Ricordiamo che l'equazione del trasporto parallelo di un vettore \vec{V} nella direzione del vettore \vec{U} si scrive come $\nabla_{\vec{U}}\vec{V} = 0$).

$$\begin{aligned} \frac{\partial V^\alpha}{\partial x^1} + \Gamma_{\beta 1}^\alpha V^\beta &= 0 \text{ (lungo } AB), \\ \frac{\partial V^\alpha}{\partial x^2} + \Gamma_{\beta 2}^\alpha V^\beta &= 0 \text{ (lungo } BC), \\ \frac{\partial V^\alpha}{\partial x^1} + \Gamma_{\beta 1}^\alpha V^\beta &= 0 \text{ (lungo } CD), \\ \frac{\partial V^\alpha}{\partial x^2} + \Gamma_{\beta 2}^\alpha V^\beta &= 0 \text{ (lungo } DA). \end{aligned}$$

Integriamo le quattro equazioni lungo i percorsi di appartenenza ottenendo così la variazione del vettore \vec{V} lungo ognuno dei 4 percorsi, inoltre sviluppiamo al primo ordine gli integrali lungo le linee coordinate corrispondenti ad $a + \delta a$ e $b + \delta b$

$$\begin{aligned} \delta V^\alpha &= - \int_A^B \Gamma_{\beta 1}^\alpha V^\beta dx^1 \text{ (lungo } AB), \\ \delta V^\alpha &= - \int_B^C \Gamma_{\beta 2}^\alpha V^\beta dx^2 \approx - \int_A^D \Gamma_{\beta 2}^\alpha V^\beta dx^2 - \frac{\partial}{\partial x^1} \left(\int_A^D \Gamma_{\beta 2}^\alpha V^\beta dx^2 \right) \delta a \text{ (lungo } BC), \\ \delta V^\alpha &= - \int_C^D \Gamma_{\beta 1}^\alpha V^\beta dx^1 \approx - \int_B^A \Gamma_{\beta 1}^\alpha V^\beta dx^1 - \frac{\partial}{\partial x^2} \left(\int_B^A \Gamma_{\beta 1}^\alpha V^\beta dx^1 \right) \delta b \text{ (lungo } CD), \\ \delta V^\alpha &= - \int_D^A \Gamma_{\beta 2}^\alpha V^\beta dx^2 \text{ (lungo } DA). \end{aligned}$$

Sommiamo i 4 contributi per ottenere la variazione totale lungo il loop, otteniamo

$$\begin{aligned} \delta V^\alpha &\approx - \int_A^B \Gamma_{\beta 1}^\alpha V^\beta dx^1 - \int_A^D \Gamma_{\beta 2}^\alpha V^\beta dx^2 - \frac{\partial}{\partial x^1} \left(\int_A^D \Gamma_{\beta 2}^\alpha V^\beta dx^2 \right) \delta a + \\ &\quad - \int_B^A \Gamma_{\beta 1}^\alpha V^\beta dx^1 - \frac{\partial}{\partial x^2} \left(\int_B^A \Gamma_{\beta 1}^\alpha V^\beta dx^1 \right) \delta b - \int_D^A \Gamma_{\beta 2}^\alpha V^\beta dx^2 = \\ &= - \frac{\partial}{\partial x^1} \left(\int_A^D \Gamma_{\beta 2}^\alpha V^\beta dx^2 \right) \delta a - \frac{\partial}{\partial x^2} \left(\int_B^A \Gamma_{\beta 1}^\alpha V^\beta dx^1 \right) \delta b = - \frac{\partial}{\partial x^1} \left(\int_b^{b+\delta b} \Gamma_{\beta 2}^\alpha V^\beta dx^2 \right) \delta a - \frac{\partial}{\partial x^2} \left(\int_{a+\delta a}^a \Gamma_{\beta 1}^\alpha V^\beta dx^1 \right) \delta b = \\ &= - \frac{\partial}{\partial x^1} \left(\int_b^{b+\delta b} \Gamma_{\beta 2}^\alpha V^\beta dx^2 \right) \delta a + \frac{\partial}{\partial x^2} \left(\int_a^{a+\delta a} \Gamma_{\beta 1}^\alpha V^\beta dx^1 \right) \delta b \approx - \frac{\partial}{\partial x^1} (\Gamma_{\beta 2}^\alpha V^\beta \delta b) \delta a + \frac{\partial}{\partial x^2} (\Gamma_{\beta 1}^\alpha V^\beta \delta a) \delta b \approx \\ &\approx \delta a \delta b \left(- \frac{\partial}{\partial x^1} (\Gamma_{\beta 2}^\alpha V^\beta) + \frac{\partial}{\partial x^2} (\Gamma_{\beta 1}^\alpha V^\beta) \right) = \delta a \delta b \left(- \frac{\partial \Gamma_{\beta 2}^\alpha}{\partial x^1} V^\beta - \frac{\partial V^k}{\partial x^1} \Gamma_{k 2}^\alpha + \frac{\partial \Gamma_{\beta 1}^\alpha}{\partial x^2} V^\beta + \frac{\partial V^k}{\partial x^2} \Gamma_{k 1}^\alpha \right); \end{aligned}$$

in cui nel secondo passaggio abbiamo invertito gli estremi di integrazione per sommare a zero i termini senza derivate, nel terzo passaggio si sono sostituiti gli estremi di integrazione in relazione alla figura 1, nel quarto passaggio abbiamo invertito gli estremi del secondo integrale, nel quinto passaggio si sono calcolati gli integrali infinitesimi, nel sesto si sono trascurati gli ordini superiori in δa e δb ed, infine, nell'ultimo passaggio si sono sviluppate le derivate.

Utilizzando le prime equazioni del paragrafo possiamo sostituire le derivate del vettore e riscrivere l'equazione sopra come

$$\delta V^\alpha = \delta a \delta b \left(-\frac{\partial \Gamma_{\beta 2}^\alpha}{\partial x^1} V^\beta + \Gamma_{\beta 1}^k V^\beta \Gamma_{k 2}^\alpha + \frac{\partial \Gamma_{\beta 1}^\alpha}{\partial x^2} V^\beta - \Gamma_{\beta 2}^k V^\beta \Gamma_{k 1}^\alpha \right) = \delta a \delta b \left(-\frac{\partial \Gamma_{\beta 2}^\alpha}{\partial x^1} + \Gamma_{\beta 1}^k \Gamma_{k 2}^\alpha + \frac{\partial \Gamma_{\beta 1}^\alpha}{\partial x^2} - \Gamma_{\beta 2}^k \Gamma_{k 1}^\alpha \right) V^\beta.$$

A questo punto occorre notare che le quantità δa e δb possono essere scritte come un vettore la cui unica componente non nulla è proprio δa o δb

$$\begin{aligned} \delta x^\mu &= (0, \delta a, 0, 0) = \delta a \delta_1^\mu \Rightarrow \delta a = \delta_\mu^1 \delta x^\mu; \\ \delta y^\nu &= (0, 0, \delta b, 0) = \delta b \delta_2^\nu \Rightarrow \delta b = \delta_\nu^2 \delta y^\nu, \end{aligned}$$

per cui possiamo riscrivere δV^α come

$$\begin{aligned} \delta V^\alpha &= \delta_\mu^1 \delta x^\mu \delta_\nu^2 \delta y^\nu \left(-\frac{\partial \Gamma_{\beta 2}^\alpha}{\partial x^1} + \Gamma_{\beta 1}^k \Gamma_{k 2}^\alpha + \frac{\partial \Gamma_{\beta 1}^\alpha}{\partial x^2} - \Gamma_{\beta 2}^k \Gamma_{k 1}^\alpha \right) V^\beta = \delta x^\mu \delta y^\nu \left(-\frac{\partial \Gamma_{\beta \nu}^\alpha}{\partial x^\mu} + \Gamma_{\beta \mu}^k \Gamma_{k \nu}^\alpha + \frac{\partial \Gamma_{\beta \mu}^\alpha}{\partial x^\nu} - \Gamma_{\beta \nu}^k \Gamma_{k \mu}^\alpha \right) V^\beta = \\ &= \delta x^\mu \delta y^\nu \left(\Gamma_{\beta \mu, \nu}^\alpha - \Gamma_{\beta \nu, \mu}^\alpha - \Gamma_{\beta \nu}^k \Gamma_{k \mu}^\alpha + \Gamma_{\beta \mu}^k \Gamma_{k \nu}^\alpha \right) V^\beta. \end{aligned}$$

Denominiamo il termine tra parentesi come

$$R_{\beta \nu \mu}^\alpha = \Gamma_{\beta \mu, \nu}^\alpha - \Gamma_{\beta \nu, \mu}^\alpha - \Gamma_{\beta \nu}^k \Gamma_{k \mu}^\alpha + \Gamma_{\beta \mu}^k \Gamma_{k \nu}^\alpha, \quad (2)$$

per cui abbiamo

$$\delta V^\alpha = \delta x^\mu \delta y^\nu R_{\beta \nu \mu}^\alpha V^\beta \Rightarrow \delta V^\alpha V_\alpha = \delta x^\mu \delta y^\nu R_{\beta \nu \mu}^\alpha V^\beta V_\alpha;$$

dato che il primo membro è uno scalare deve esserlo anche la quantità a destra dell'uguale, ciò comporta che se consideriamo un generico tensore R (1, 3) funzione lineare, quindi, di una 1-forma e di tre vettori questo produrrà il seguente numero $R(\tilde{\omega}, \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = R_{ij}^l \omega_l a^i b^j c^k$ che è esattamente ciò che abbiamo. $R_{\beta \nu \mu}^\alpha$ è dunque un tensore, il tensore di Riemann. Questo contiene le informazioni riguardo la curvatura di una varietà riemanniana o pseudoriemanniana, infatti esso è non nullo solo su varietà curve perchè se il loop fosse fatto su una varietà piatta il trasporto parallelo di un vettore non produrrebbe alcun cambiamento; concludiamo che una varietà è curva se e solo se il tensore di Riemann è identicamente nullo. La struttura di questo tensore è lineare nelle derivate seconde della metrica (nelle derivate prime dei simboli della connessione) e non lineare nelle derivate prime della metrica; è possibile dimostrare che il tensore di Riemann è l'unico tensore che può essere costruito usando solo la metrica e le sue derivate con le caratteristiche sopra elencate. Il tensore di Riemann possiede alcune proprietà di simmetria che consentono di ridurre il numero di componenti indipendenti, queste proprietà possono essere dedotte a partire dalla forma in un LIF del tensore stesso, ossia

$$\begin{aligned} R_{\beta \nu \mu}^\alpha &= \frac{1}{2} g^{\alpha \sigma} [g_{\sigma \mu, \beta \nu} - g_{\sigma \nu, \beta \mu} + g_{\beta \nu, \sigma \mu} - g_{\beta \mu, \sigma \nu}] \\ \Rightarrow g_{\lambda \alpha} R_{\beta \nu \mu}^\alpha &= \frac{1}{2} g_{\lambda \alpha} g^{\alpha \sigma} [g_{\sigma \mu, \beta \nu} - g_{\sigma \nu, \beta \mu} + g_{\beta \nu, \sigma \mu} - g_{\beta \mu, \sigma \nu}] = \delta_\lambda^\sigma [g_{\sigma \mu, \beta \nu} - g_{\sigma \nu, \beta \mu} + g_{\beta \nu, \sigma \mu} - g_{\beta \mu, \sigma \nu}] \\ &= [g_{\lambda \mu, \beta \nu} - g_{\lambda \nu, \beta \mu} + g_{\beta \nu, \lambda \mu} - g_{\beta \mu, \lambda \nu}] = R_{\lambda \beta \nu \mu} \end{aligned} \quad (3)$$

le simmetrie sono:

- $R_{\lambda \beta \nu \mu} = -R_{\beta \lambda \nu \mu} = -R_{\lambda \beta \mu \nu}$ (antisimmetria sotto scambio di una coppia);
- $R_{\lambda \beta \nu \mu} = R_{\nu \mu \lambda \beta}$ (simmetria sotto scambio di entrambe le coppie);
- $R_{\lambda \beta \nu \mu} + R_{\lambda \mu \beta \nu} + R_{\lambda \nu \mu \beta} = 0$ (identità di Ricci).

Queste proprietà riducono il numero di componenti indipendenti da d^4 (d è la dimensione della varietà in esame) a $\frac{d^2(d^2-1)}{12}$; nel caso della relatività generale da 256 a $\frac{4^2(4^2-1)}{12} = 20$.

A partire dal tensore di Riemann è possibile costruire tensori di rango inferiore utili nella descrizione della curvatura di una varietà e nella discussione sulle singularità di curvatura (o gravitazionali), ossia i punti in cui la curvatura diverge. Le più importanti contrazioni possibili sono:

- $R_{\beta \mu} = g^{\lambda \nu} R_{\lambda \beta \nu \mu} = R_{\beta \nu \mu}^\nu$ (tensore di Ricci, contrazione su primo e terzo indice);
- $R = g^{\beta \mu} R_{\beta \mu} = R_\mu^\mu$ (scalare di Ricci, traccia del tensore di Ricci);
- $K = R_{\lambda \beta \nu \mu} R^{\lambda \beta \nu \mu}$ (scalare di Kretschmann, contrazione su tutti gli indici del tensore di Riemann).

E' possibile dimostrare (teorema di Vermeil) che lo scalare di Ricci, R , è l'unico scalare invariante di curvatura che è lineare nelle derivate seconde del tensore metrico ed, inoltre, il tensore di Ricci e lo scalare di Ricci sono gli unici tensori, rispettivamente, di rango 2 e 0 costruibili contraendo il tensore di Riemann con la metrica.

5 Dimostrare che il tensore di Riemann dà il commutatore delle derivate covarianti

Il commutatore tra le derivate covarianti è dato da (usufruendo di un tensore di prova)

$$[\nabla_\alpha, \nabla_\beta]T_{\nu_1 \dots \nu_m}^{\mu_1 \dots \mu_n} = \nabla_\alpha \nabla_\beta T_{\nu_1 \dots \nu_m}^{\mu_1 \dots \mu_n} - \nabla_\beta \nabla_\alpha T_{\nu_1 \dots \nu_m}^{\mu_1 \dots \mu_n},$$

dobbiamo quindi calcolare le quantità a destra dell'uguale; ci basterà calcolarne una dato che l'altra ha solo gli indici scambiati. Sviluppiamo il primo termine del secondo membro

$$\begin{aligned} \nabla_\alpha \nabla_\beta T_{\nu_1 \dots \nu_m}^{\mu_1 \dots \mu_n} &= \nabla_\alpha (T_{\nu_1 \dots \nu_m; \beta}^{\mu_1 \dots \mu_n}) = \\ &= (T_{\nu_1 \dots \nu_m; \beta}^{\mu_1 \dots \mu_n})_{, \alpha} + \Gamma_{\rho \alpha}^{\mu_1} T_{\nu_1 \dots \nu_m; \beta}^{\rho \dots \mu_n} + \dots + \Gamma_{\rho \alpha}^{\mu_n} T_{\nu_1 \dots \nu_m; \beta}^{\mu_1 \dots \rho} - \Gamma_{\nu_1 \alpha}^\rho T_{\rho \dots \nu_m; \beta}^{\mu_1 \dots \mu_n} - \dots - \Gamma_{\nu_m \alpha}^\rho T_{\nu_1 \dots \rho; \beta}^{\mu_1 \dots \mu_n} - \Gamma_{\beta \alpha}^\rho T_{\nu_1 \dots \nu_m; \rho}^{\mu_1 \dots \mu_n} \end{aligned}$$

Queste sono equazioni tensoriali, devono valere in ogni sistema di riferimento e nello specifico nel LIF; per semplicità valutiamo il commutatore nel LIF. Se ci mettiamo nel LIF, i simboli della connessione affine sono tutti nulli (ma non le loro derivate), otteniamo quindi

$$\begin{aligned} \nabla_\alpha \nabla_\beta T_{\nu_1 \dots \nu_m}^{\mu_1 \dots \mu_n} &= \nabla_\alpha (T_{\nu_1 \dots \nu_m; \beta}^{\mu_1 \dots \mu_n}) = (T_{\nu_1 \dots \nu_m; \beta}^{\mu_1 \dots \mu_n})_{, \alpha} = \\ &= T_{\nu_1 \dots \nu_m; \beta, \alpha}^{\mu_1 \dots \mu_n} + \Gamma_{\rho \beta, \alpha}^{\mu_1} T_{\nu_1 \dots \nu_m}^{\rho \dots \mu_n} + \dots + \Gamma_{\rho \beta, \alpha}^{\mu_n} T_{\nu_1 \dots \nu_m}^{\mu_1 \dots \rho} - \Gamma_{\nu_1 \beta, \alpha}^\rho T_{\rho \dots \nu_m}^{\mu_1 \dots \mu_n} - \dots - \Gamma_{\nu_m \beta, \alpha}^\rho T_{\nu_1 \dots \rho}^{\mu_1 \dots \mu_n}, \end{aligned}$$

da notare che nel valutare le derivate rispetto ad α si è tenuto conto solo dei termini in cui compaiono le derivate dei simboli della connessione affine, mentre i termini contenenti derivate del tensore e nessuna derivata dei simboli di Christoffel sono nulli perchè lavoriamo in un LIF. Analogamente si ha

$$\begin{aligned} \nabla_\beta \nabla_\alpha T_{\nu_1 \dots \nu_m}^{\mu_1 \dots \mu_n} &= \nabla_\beta (T_{\nu_1 \dots \nu_m; \alpha}^{\mu_1 \dots \mu_n}) = (T_{\nu_1 \dots \nu_m; \alpha}^{\mu_1 \dots \mu_n})_{, \beta} = \\ &= T_{\nu_1 \dots \nu_m; \alpha, \beta}^{\mu_1 \dots \mu_n} + \Gamma_{\rho \alpha, \beta}^{\mu_1} T_{\nu_1 \dots \nu_m}^{\rho \dots \mu_n} + \dots + \Gamma_{\rho \alpha, \beta}^{\mu_n} T_{\nu_1 \dots \nu_m}^{\mu_1 \dots \rho} - \Gamma_{\nu_1 \alpha, \beta}^\rho T_{\rho \dots \nu_m}^{\mu_1 \dots \mu_n} - \dots - \Gamma_{\nu_m \alpha, \beta}^\rho T_{\nu_1 \dots \rho}^{\mu_1 \dots \mu_n}. \end{aligned}$$

In definitiva, valutando il commutatore (ricordando che $T_{\nu_1 \dots \nu_m; \beta, \alpha}^{\mu_1 \dots \mu_n} = T_{\nu_1 \dots \nu_m; \alpha, \beta}^{\mu_1 \dots \mu_n}$ perchè le derivate ordinarie commutano sempre) si ha

$$\begin{aligned} [\nabla_\alpha, \nabla_\beta]T_{\nu_1 \dots \nu_m}^{\mu_1 \dots \mu_n} &= \nabla_\alpha \nabla_\beta T_{\nu_1 \dots \nu_m}^{\mu_1 \dots \mu_n} - \nabla_\beta \nabla_\alpha T_{\nu_1 \dots \nu_m}^{\mu_1 \dots \mu_n} = \\ &= (\Gamma_{\rho \beta, \alpha}^{\mu_1} - \Gamma_{\rho \alpha, \beta}^{\mu_1})T_{\nu_1 \dots \nu_m}^{\rho \dots \mu_n} + \dots + (\Gamma_{\rho \beta, \alpha}^{\mu_n} - \Gamma_{\rho \alpha, \beta}^{\mu_n})T_{\nu_1 \dots \nu_m}^{\mu_1 \dots \rho} + (\Gamma_{\nu_1 \alpha, \beta}^\rho - \Gamma_{\nu_1 \beta, \alpha}^\rho)T_{\rho \dots \nu_m}^{\mu_1 \dots \mu_n} + \dots + (\Gamma_{\nu_m \alpha, \beta}^\rho - \Gamma_{\nu_m \beta, \alpha}^\rho)T_{\nu_1 \dots \rho}^{\mu_1 \dots \mu_n} = \\ &= R_{\rho \alpha \beta}^{\mu_1} T_{\nu_1 \dots \nu_m}^{\rho \dots \mu_n} + \dots + R_{\rho \alpha \beta}^{\mu_n} T_{\nu_1 \dots \nu_m}^{\mu_1 \dots \rho} + R_{\nu_1 \beta \alpha}^\rho T_{\rho \dots \nu_m}^{\mu_1 \dots \mu_n} + \dots + R_{\nu_m \beta \alpha}^\rho T_{\nu_1 \dots \rho}^{\mu_1 \dots \mu_n}, \end{aligned}$$

nell'ultima uguaglianza abbiamo usato il fatto che il tensore di Riemann nel LIF è dato da $R_{\beta \gamma}^\alpha = \Gamma_{\beta \delta, \gamma}^\alpha - \Gamma_{\beta \gamma, \delta}^\alpha$. Il tensore di Riemann dà quindi il commutatore delle derivate covarianti (che, come si vede, non commutano); la relazione trovata non è una relazione operatoriale e necessita sempre del tensore di prova per via delle contrazioni al secondo membro.

6 Dimostrare le identità di Bianchi ricordando che in un riferimento localmente inerziale il tensore di Riemann diventa $R_{\alpha\beta\mu\nu} = \frac{1}{2}[g_{\alpha\nu, \beta\mu} - g_{\alpha\mu, \beta\nu} + g_{\beta\mu, \alpha\nu} - g_{\beta\nu, \alpha\mu}]$

Le identità di Bianchi si scrivono come

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta; \lambda} + R_{\alpha\beta\lambda\gamma; \delta} + R_{\alpha\beta\delta\lambda; \gamma} = 0, \quad (4)$$

essendo le (4) delle equazioni tensoriali, sono valide in ogni sistema di riferimento; nello specifico in un LIF diventano

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta, \lambda} + R_{\alpha\beta\lambda\gamma, \delta} + R_{\alpha\beta\delta\lambda, \gamma} = 0.$$

Ricordando che in un LIF si ha $R_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{1}{2}[g_{\alpha\delta, \beta\gamma} - g_{\alpha\gamma, \beta\delta} + g_{\beta\gamma, \alpha\delta} - g_{\beta\delta, \alpha\gamma}]$, otteniamo

$$\begin{aligned} R_{\alpha\beta\gamma\delta, \lambda} &= \frac{1}{2}[g_{\alpha\delta, \beta\gamma\lambda} - g_{\alpha\gamma, \beta\delta\lambda} + g_{\beta\gamma, \alpha\delta\lambda} - g_{\beta\delta, \alpha\gamma\lambda}]; \\ R_{\alpha\beta\lambda\gamma, \delta} &= \frac{1}{2}[g_{\alpha\gamma, \beta\lambda\delta} - g_{\alpha\lambda, \beta\gamma\delta} + g_{\beta\lambda, \alpha\gamma\delta} - g_{\beta\gamma, \alpha\lambda\delta}]; \\ R_{\alpha\beta\delta\lambda, \gamma} &= \frac{1}{2}[g_{\alpha\lambda, \beta\delta\gamma} - g_{\alpha\delta, \beta\lambda\gamma} + g_{\beta\delta, \alpha\lambda\gamma} - g_{\beta\lambda, \alpha\delta\gamma}]. \end{aligned}$$

Mettendo tutto insieme si ha

$$\begin{aligned} R_{\alpha\beta\gamma\delta, \lambda} + R_{\alpha\beta\lambda\gamma, \delta} + R_{\alpha\beta\delta\lambda, \gamma} &= \\ \frac{1}{2}[g_{\alpha\delta, \beta\gamma\lambda} - g_{\alpha\gamma, \beta\delta\lambda} + g_{\beta\gamma, \alpha\delta\lambda} - g_{\beta\delta, \alpha\gamma\lambda} + g_{\alpha\gamma, \beta\lambda\delta} + \\ -g_{\alpha\lambda, \beta\gamma\delta} + g_{\beta\lambda, \alpha\gamma\delta} - g_{\beta\gamma, \alpha\lambda\delta} + g_{\alpha\lambda, \beta\delta\gamma} - g_{\alpha\delta, \beta\lambda\gamma} + g_{\beta\delta, \alpha\lambda\gamma} - g_{\beta\lambda, \alpha\delta\gamma}] &= 0. \end{aligned}$$

Le identità di Bianchi giocano un ruolo essenziale per la costruzione delle equazioni di campo di Einstein; infatti esse permettono di ricavare delle importanti identità soddisfatte da una peculiare combinazione del tensore e lo scalare di Ricci. Presa la (4) contraiamola tre volte con la metrica; la prima contrazione è fatta sul primo indice degli addendi e sull'indice di derivazione del terzo addendo, ossia

$$g^{\alpha\gamma}(R_{\alpha\beta\gamma\delta;\lambda} + R_{\alpha\beta\lambda\gamma;\delta} + R_{\alpha\beta\delta\lambda;\gamma}) = R_{\beta\delta;\lambda} - R_{\beta\lambda;\delta} + R_{\beta\delta\lambda;\gamma}^{\gamma} = 0,$$

nella contrazione col secondo addendo si sono scambiati terzo e quarto indice del tensore di Riemann (con cambio di segno per l'antisimmetria) per poter ottenere il tensore di Ricci. La seconda contrazione è fatta in modo da far comparire nel primo addendo lo scalare di Ricci, quindi

$$g^{\beta\delta}(R_{\beta\delta;\lambda} - R_{\beta\lambda;\delta} + R_{\beta\delta\lambda;\gamma}^{\gamma}) = R_{;\lambda} - R_{\lambda;\delta}^{\delta} - R_{\lambda;\gamma}^{\gamma} = R_{;\lambda} - 2R_{\lambda;\delta}^{\delta} = 0,$$

nella contrazione con il terzo addendo si sono scambiati primo e secondo indice del tensore di Riemann (con cambio di segno per l'antisimmetria) per poter ottenere il tensore di Ricci. La terza contrazione è fatta sull'indice di derivazione dello scalare di Ricci

$$g^{\lambda\sigma}(R_{;\lambda} - 2R_{\lambda;\delta}^{\delta}) = g^{\lambda\sigma}R_{;\lambda} - 2R_{;\delta}^{\delta\sigma} = g^{\lambda\sigma}R_{;\lambda} - 2R_{;\lambda}^{\lambda\sigma} = (g^{\lambda\sigma}R - 2R^{\lambda\sigma})_{;\lambda} = 0.$$

Alla fine abbiamo ottenuto

$$\left(R^{\lambda\sigma} - \frac{1}{2}g^{\lambda\sigma}R \right)_{;\lambda} = 0; \quad (5)$$

queste identità ci torneranno molto utili.

7 Definire il tensore energia-impulso per un sistema di particelle non interagenti in Relatività Speciale, discutere il significato delle componenti e mostrare che è un tensore

Il tensore energia-impulso gioca un ruolo importante nelle equazioni di campo essendo il termine che tiene conto dell'energia e dell'impulso della materia (o di altri campi). E' importante notare che il tensore energia-impulso non tiene conto delle quantità relative al campo gravitazionale; infatti potendo sempre scegliere un LIF, quindi potendo sempre eliminare il contributo del campo gravitazionale, è impossibile definire una quantità tensoriale in grado di tener conto dell'energia ed impulso associate al campo stesso (questo perchè nel LIF sarebbe nullo non essendoci il campo gravitazionale e quindi dovrebbe essere nullo in tutti i sistemi di riferimento il che è assurdo).

Definiamo le componenti del tensore energia impulso per un sistema di particelle non interagenti (gli indici i e k vanno da 1 a 3)

$$\begin{aligned} T^{00} &:= \sum_n E_n(t)\delta^{(3)}(\vec{\xi} - \vec{\xi}_n(t)) \text{ (densità di energia);} \\ T^{i0} &:= \sum_n cp_n^i(t)\delta^{(3)}(\vec{\xi} - \vec{\xi}_n(t)) \text{ (} c \times \text{ densità di impulso);} \\ T^{ki} &:= \sum_n p_n^k(t)\frac{d\xi_n^i(t)}{dt}\delta^{(3)}(\vec{\xi} - \vec{\xi}_n(t)) \text{ (impulso per unità di tempo e superficie),} \end{aligned}$$

l'ultima delle equazioni sta a significare quella quantità il cui flusso restituisce l'impulso per unità di tempo che scorre attraverso la superficie su cui si è calcolato il flusso (o più brevemente la densità di flusso di corrente di impulso). Possiamo scrivere il tensore energia-impulso in maniera più compatta

$$\begin{aligned} T^{\alpha\beta} &:= \sum_n p_n^\alpha \frac{d\xi_n^\beta(t)}{dt} \delta^{(3)}(\vec{\xi} - \vec{\xi}_n(t)) = c^2 \sum_n \frac{p_n^\alpha p_n^\beta}{E_n} \delta^{(3)}(\vec{\xi} - \vec{\xi}_n(t)) = \\ &= c^2 \sum_n \frac{m^2}{m\gamma c^2} \frac{d\xi_n^\alpha}{d\tau} \frac{d\xi_n^\beta}{d\tau} \delta^{(3)}(\vec{\xi} - \vec{\xi}_n(t)) = \sum_n \frac{m}{\gamma} \frac{d\xi_n^\alpha}{d\tau} \frac{d\xi_n^\beta}{d\tau} \delta^{(3)}(\vec{\xi} - \vec{\xi}_n(t)) \end{aligned} \quad (6)$$

nella seconda riscrittura si è sfruttato il fatto che $p_n^\beta = mu_n^\beta = m\gamma \frac{d\xi_n^\beta(t)}{dt} = \frac{E_n}{c^2} \frac{d\xi_n^\beta(t)}{dt}$, mentre nella terza si sono sostituite le definizioni di quadrimpulso ed energia. Dall'equazione precedente si nota la simmetria del tensore energia-impulso.

Cerchiamo ora un'ulteriore utile forma del tensore energia-impulso

$$\begin{aligned}
T^{\alpha\beta} &= \frac{c}{c} \sum_n p_n^\alpha \frac{d\xi_n^\beta(t)}{dt} \delta^{(3)}(\vec{\xi} - \vec{\xi}_n(t)) = c \sum_n p_n^\alpha \frac{d\xi_n^\beta(t)}{d\xi^0} \delta^{(3)}(\vec{\xi} - \vec{\xi}_n(t)) = \\
&= c \sum_n \int p_n^\alpha \frac{d\xi_n^\beta(t)}{d\xi_n^0(t)} \delta^{(3)}(\vec{\xi} - \vec{\xi}_n(t)) \delta(\xi^0 - \xi_n^0(t)) d\xi_n^0(t) = c \sum_n \int p_n^\alpha \frac{d\xi_n^\beta(t)}{d\xi_n^0(t)} \delta^{(3)}(\vec{\xi} - \vec{\xi}_n(t)) \delta(\xi^0 - \xi_n^0(t)) d\xi_n^0(t) \frac{d\tau_n}{d\tau_n} = \\
&= c \sum_n \int p_n^\alpha \frac{d\xi_n^\beta(t)}{d\tau_n} \delta^{(3)}(\vec{\xi} - \vec{\xi}_n(t)) \delta(\xi^0 - \xi_n^0(\tau_n)) d\tau_n.
\end{aligned}$$

Possiamo definire il tensore energia-impulso come

$$T^{\alpha\beta} := c \sum_n \int p_n^\alpha \frac{d\xi_n^\beta(t)}{d\tau_n} \delta^{(4)}(\xi^\mu - \xi_n^\mu(\tau_n)) d\tau_n = c \sum_n \int p_n^\alpha u_n^\beta \delta^{(4)}(\xi^\mu - \xi_n^\mu(\tau_n)) d\tau_n; \quad (7)$$

la forma (7) ci permetterà di dimostrare che il tensore energia impulso è effettivamente un tensore.

Prima di tutto ricordiamo che sotto un cambio di coordinate dal sistema O' al sistema O l'elemento di volume si trasforma come $d^4x = \frac{\sqrt{-g'}}{\sqrt{-g}} d^4x'$ (in cui g e g' indicano i determinanti della metrica nei due sistemi di riferimento) questo comporta che $\delta^{(4)}(x^\mu) = \frac{\sqrt{-g}}{\sqrt{-g'}} \delta^{(4)'}(x^{\mu'})$. Immaginiamo di fare un generico cambio di coordinate, dal sistema O' al sistema O e indichiamo con Λ_ν^μ la matrice jacobiana della trasformazione

$$T^{\alpha\beta} := c \sum_n \int p_n^\alpha u_n^\beta \delta^{(4)}(x^\mu - x_n^\mu(\tau_n)) d\tau_n = c \sum_n \int \Lambda_{\alpha'}^\alpha p_n^{\alpha'} \Lambda_{\beta'}^\beta u_n^{\beta'} \frac{\sqrt{-g}}{\sqrt{-g'}} \delta^{(4)'}(x^{\mu'} - x_n^{\mu'}(\tau_n)) d\tau_n.$$

Se definissimo il tensore energia-impulso nel generico sistema di riferimento come

$$T^{\alpha\beta} := c \sum_n \int p_n^\alpha u_n^\beta \frac{1}{\sqrt{-g}} \delta^{(4)}(x^\mu - x_n^\mu(\tau_n)) d\tau_n \quad (8)$$

allora avremmo

$$T^{\alpha\beta} := c \sum_n \int p_n^\alpha u_n^\beta \frac{1}{\sqrt{-g}} \delta^{(4)}(x^\mu - x_n^\mu(\tau_n)) d\tau_n = c \sum_n \int \Lambda_{\alpha'}^\alpha p_n^{\alpha'} \Lambda_{\beta'}^\beta u_n^{\beta'} \frac{1}{\sqrt{-g'}} \delta^{(4)'}(x^{\mu'} - x_n^{\mu'}(\tau_n)) d\tau_n = \Lambda_{\alpha'}^\alpha \Lambda_{\beta'}^\beta T^{\alpha'\beta'},$$

e quindi, $T^{\alpha\beta}$, sarebbe a tutti gli effetti un tensore. A prima vista sembrerebbe che la definizione (8) sia in contrasto con la definizione (7) ma guardando attentamente e ricordando che il determinante della metrica nel sistema di riferimento minkowskiano (o nel LIF) è pari a -1 si vede che non c'è alcuna inconsistenza. La (8) è valida in tutti i sistemi di riferimento. Nell'introduzione del paragrafo abbiamo sottolineato come sia impossibile definire un tensore energia-impulso per il campo gravitazionale, tuttavia, è possibile definire una quantità che si annulla solo nel LIF (essendo composto da prodotti quadratici di simboli di Christoffel) e che quando sommato al tensore energia-impulso della materia (o di altri campi) soddisfa una legge di conservazione. Tale pseudo-tensore (nel senso che non è un tensore) può essere interpretato come lo pseudo-tensore energia-impulso del campo gravitazionale ed è detto pseudo-tensore di Landau-Lifschitz.

8 Dimostrare che in Relatività Speciale il tensore energia-impulso per un sistema di particelle soddisfa la legge di conservazione $T_{,\beta}^{\alpha\beta} = 0$

Poniamoci in uno spazio piatto, allora dalla (6) abbiamo che il tensore energia-impulso assume la forma

$$T^{\alpha\beta} := c \sum_n \int p_n^\alpha u_n^\beta \delta^{(4)}(x^\mu - x_n^\mu(\tau_n)) d\tau_n \Rightarrow (\text{in spazio piatto}) T^{\alpha\beta} = \sum_n p_n^\alpha \frac{d\xi_n^\beta(t)}{dt} \delta^{(3)}(\vec{\xi} - \vec{\xi}_n(t)).$$

Calcoliamo la divergenza spaziale dell'equazione sopra, notando che $\frac{\partial}{\partial \xi^i} \delta^{(3)}(\vec{\xi} - \vec{\xi}_n(t)) = -\frac{\partial}{\partial \xi_n^i} \delta^{(3)}(\vec{\xi} - \vec{\xi}_n(t))$,

$$\frac{\partial T^{\alpha i}}{\partial \xi^i} = \sum_n p_n^\alpha \frac{d\xi_n^i(t)}{dt} \frac{\partial}{\partial \xi^i} \delta^{(3)}(\vec{\xi} - \vec{\xi}_n(t)) = -\sum_n p_n^\alpha \frac{d\xi_n^i(t)}{dt} \frac{\partial}{\partial \xi_n^i} \delta^{(3)}(\vec{\xi} - \vec{\xi}_n(t)) = -\sum_n p_n^\alpha \frac{\partial}{\partial t} \delta^{(3)}(\vec{\xi} - \vec{\xi}_n(t)).$$

Consoderiamo, ora, la derivata rispetto alla componente $\alpha 0$ ricordando che $\frac{\partial p_n^{\alpha n}}{\partial \xi^0} = \frac{1}{c} \frac{\partial p_n^\alpha}{\partial t} = \frac{1}{c} \frac{\partial p_n^\alpha}{\partial \tau} \frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{c} \frac{d\tau}{dt} f_n^\alpha$

$$\frac{\partial T^{\alpha 0}}{\partial \xi^0} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} c \sum_n p_n^\alpha \delta^{(3)}(\vec{\xi} - \vec{\xi}_n(t)) = \sum_n \frac{\partial}{\partial t} p_n^\alpha \delta^{(3)}(\vec{\xi} - \vec{\xi}_n(t)) + \sum_n p_n^\alpha \frac{\partial}{\partial t} \delta^{(3)}(\vec{\xi} - \vec{\xi}_n(t)) = F^\alpha + \sum_n p_n^\alpha \frac{\partial}{\partial t} \delta^{(3)}(\vec{\xi} - \vec{\xi}_n(t)),$$

in cui F^α è la densità di forza. Assumendo una particella libera la densità di forza è nulla (non ci sono forze applicate) per cui sopravvive solo il secondo termine; sommiamo i contributi delle due equazioni precedenti per determinare la quadridivergenza del tensore energia-impulso

$$T_{;\beta}^{\alpha\beta} = \frac{\partial T^{\alpha\beta}}{\partial \xi^\beta} = \frac{\partial T^{\alpha i}}{\partial \xi^i} + \frac{\partial T^{\alpha 0}}{\partial \xi^0} = - \sum_n p_n^\alpha \frac{\partial}{\partial t} \delta^{(3)}(\vec{\xi} - \vec{\xi}_n(t)) + \sum_n p_n^\alpha \frac{\partial}{\partial t} \delta^{(3)}(\vec{\xi} - \vec{\xi}_n(t)) = 0. \quad (9)$$

La (9) ci permette di definire delle quantità conservate; infatti trasformando col teorema della divergenza la tridivergenza otteniamo un flusso che può essere posto a zero assumendo che il tensore energia-impulso si annulli, all'infinito, sul bordo del volume di integrazione. Quanto detto ci consente di dire che la quantità $\frac{1}{c} \int_V T^{\alpha 0} dV$ è costante nel tempo e quindi conservata.

9 Dato il generico tensore energia-impulso $T^{\alpha\beta}$ spiegare perchè l'equazione $T_{;\beta}^{\alpha\beta} = 0$, valida in spaziotempo piatto è una legge di conservazione, mentre $T_{;\beta}^{\alpha\beta} = 0$, valida in spaziotempo curvo, non lo è

Sappiamo che in spazio piatto il tensore energia impulso soddisfa

$$T_{;\beta}^{\alpha\beta} = \frac{\partial T^{\alpha\beta}}{\partial \xi^\beta} = \frac{\partial T^{\alpha i}}{\partial \xi^i} + \frac{\partial T^{\alpha 0}}{\partial \xi^0} = 0;$$

da cui, utilizzando il teorema della divergenza, si ha

$$\int_V \frac{\partial T^{\alpha i}}{\partial \xi^i} dV = - \int_V \frac{\partial T^{\alpha 0}}{\partial \xi^0} dV \Rightarrow \int_{\partial V} T^{\alpha i} n_i dS = - \int_V \frac{\partial T^{\alpha 0}}{\partial \xi^0} dV \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \int_V \frac{1}{c} T^{\alpha 0} dV = 0. \quad (10)$$

Quindi possiamo costruire delle quantità, ossia $p^\alpha = \int_V \frac{1}{c} T^{\alpha 0} dV$, che esprimono la conservazione dell'energia e dell'impulso.

Veniamo al caso di spazio curvo; invocando il principio su cui si basa la relatività generale, il principio di general covarianza (il quale afferma che le leggi fisiche devono essere leggi tensoriali per poter mantenere la loro forma in ogni sistema di riferimento ed inoltre devono ridursi alle leggi della relatività speciale nel caso di assenza del campo gravitazionale), possiamo affermare che deve essere $T_{;\beta}^{\alpha\beta} = 0$. Ci si pone la questione se questa è una legge di conservazione o meno. A primo impatto potrebbe venire in mente di definire le quantità conservate come $p^\alpha = \int_V \sqrt{-g} T^{\alpha 0} dV$, sfortunatamente questa quantità non si trasforma come un vettore e per tanto non può andare bene; serve un'analisi più approfondita.

Sviluppiamo la divergenza covariante del tensore energia-impulso

$$T_{;\beta}^{\alpha\beta} = T_{,\beta}^{\alpha\beta} + \Gamma_{\mu\beta}^\alpha T^{\mu\beta} + \Gamma_{\beta\mu}^\beta T^{\alpha\mu} = 0,$$

concentriamoci sull'ultimo termine. Dalla (1) e sfruttando la simmetria del tensore metrico sappiamo che

$$\Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2} g^{il} [-g_{jk,l} + g_{lj,k} + g_{kl,j}] \Rightarrow \Gamma_{\beta\mu}^\beta = \frac{1}{2} g^{\beta l} [-g_{\beta\mu,l} + g_{l\beta,\mu} + g_{\mu l,\beta}] = \frac{1}{2} g^{\beta l} g_{l\beta,\mu};$$

questo termine può essere riscritto sfruttando le proprietà di differenziazione del determinante. Notiamo che

$$\begin{aligned} \det(A + H) &= \det(A(I + A^{-1}H)) = \det(A)\det(I + A^{-1}H) = \det(A)(1 + \text{tr}(A^{-1}H)) \\ &\Rightarrow D(\det(A)(H)) = \det(A + H) - \det(A) = \det(A)\text{tr}(A^{-1}H) \\ &\Rightarrow \det'(A) = D(\det(A)(A')) = \det(A)\text{tr}(A^{-1}A') \\ &\Rightarrow \frac{\det'(A)}{\det(A)} = \frac{d}{dx} \ln(\det(A)) = \text{tr}\left(A^{-1} \frac{d}{dx} A\right); \end{aligned}$$

in cui con la notazione $D(\det(A)(H))$ si intende il differenziale del determinante "nella direzione" di H . L'ultimo termine dell'equazione sopra è esattamente quello che dobbiamo calcolare a patto di identificare $A^{-1} = g^{\beta l}$, $\frac{d}{dx} A = g_{\beta l,\mu}$ e la traccia è fatta perché stiamo contrando gli indici. In definitiva possiamo scrivere

$$\frac{1}{2} g^{\beta l} g_{l\beta,\mu} = \frac{1}{2} \ln(-g)_{,\mu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \sqrt{-g}.$$

Utilizzando questa espressione per riscrivere la divergenza covariante del tensore energia-impulso si ottiene

$$T_{;\beta}^{\alpha\beta} + \Gamma_{\mu\beta}^\alpha T^{\mu\beta} + \Gamma_{\beta\mu}^\beta T^{\alpha\mu} = T_{,\beta}^{\alpha\beta} + \Gamma_{\mu\beta}^\alpha T^{\mu\beta} + \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \sqrt{-g} T^{\alpha\mu} = 0 \Rightarrow \Gamma_{\mu\beta}^\alpha T^{\mu\beta} = - \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\mu} (\sqrt{-g} T^{\alpha\mu}), \quad (11)$$

che non permette la definizione di quantità conservate. Fisicamente questo è comprensibile in quanto il tensore energia-impulso $T^{\alpha\beta}$ non tiene conto di tutte le grandezze in gioco dato che non descrive il campo gravitazionale che nello spazio curvo è presente. Come detto è possibile definire uno pseudo-tensore che tiene conto dell'energia e dell'impulso del campo stesso e che se sommato al tensore energia-impulso della materia consente la scrittura di una quadridivergenza nulla da cui estrarre leggi di conservazione.

10 Discutere l'equazione delle geodetiche nel limite newtoniano

Le equazioni delle geodetiche descrivono le traiettorie che un corpo segue all'interno di uno spazio curvo (e quindi sottoposto al campo gravitazionale), queste sono date da

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} = 0, \quad (12)$$

in cui τ è un qualunque parametro affine. Ci chiediamo come le (12) diventino nel caso di campo debole stazionario e velocità non relativistiche; ci aspettiamo che, in un certo modo, otterremo nuovamente la legge di gravitazione universale di Newton. Le tre approssimazioni si scrivono come:

- $v \ll c \Rightarrow \frac{dx^i}{dt} \frac{d\tau}{dt} \ll c \Rightarrow \frac{dx^i}{d\tau} \ll c \frac{dt}{d\tau} = \frac{dx^0}{d\tau}$ (regime non relativistico);
- $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ e $g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}$ (regime di campo debole);
- $g_{\mu\nu,0} \equiv h_{\mu\nu,0} \equiv 0$ (regime stazionario),

in cui $\eta_{\mu\nu}$ è la metrica piatta e $h_{\mu\nu}$ una piccola perturbazione ($|h_{\mu\nu}| \ll 1$). Sfruttando la prima approssimazione le equazioni delle geodetiche diventano

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{00}^\mu \frac{dx^0}{d\tau} \frac{dx^0}{d\tau} = \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{00}^\mu \left(\frac{cdt}{d\tau^2} \right)^2 = 0;$$

sviluppiamo il simbolo di Christoffel (ricordando che la metrica è stazionaria) $\Gamma_{00}^\mu = \frac{1}{2}g^{\mu l}[-g_{00,l} + g_{l0,0} + g_{0l,0}] = \frac{1}{2}g^{\mu l}[-g_{00,l}]$ ed inseriamolo nelle equazioni delle geodetiche trovate

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \frac{1}{2}g^{\mu l}[-g_{00,l}] \left(\frac{cdt}{d\tau} \right)^2 &= \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} - \frac{1}{2}(\eta^{\mu l} - h^{\mu l})(\eta_{00,l} + h_{00,l}) \left(\frac{cdt}{d\tau} \right)^2 = \\ &= \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} - \frac{1}{2}(\eta^{\mu l} - h^{\mu l})h_{00,l} \left(\frac{cdt}{d\tau} \right)^2 \approx \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} - \frac{1}{2}\eta^{\mu l}h_{00,l} \left(\frac{cdt}{d\tau} \right)^2 = 0, \end{aligned}$$

avendo tenuto solo i termini del primo ordine nella perturbazione. La parte temporale delle equazioni appena determinate è identicamente nulla (essendo la metrica stazionaria) per cui sopravvive solo la parte spaziale (nella quale riscalamo la coordinata temporale per avere $\frac{cdt}{d\tau} = 1 \Rightarrow ct = \tau$)

$$\frac{d^2 x^i}{d\tau^2} - \frac{1}{2}\eta^{\mu l} \frac{\partial}{\partial x^l} h_{00} \left(\frac{cdt}{d\tau} \right)^2 = 0 \Rightarrow \frac{1}{c^2} \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} - \frac{1}{2} \vec{\nabla} h_{00} = 0; \quad (13)$$

le corrispondenti equazioni di Newton hanno la forma

$$\frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} + \vec{\nabla} \Phi = 0, \quad (14)$$

in cui Φ è il potenziale gravitazionale soluzione dell'equazione di Laplace $\nabla^2 \Phi = 4\pi G\rho$. Sottraendo l'equazione (13) alla (14) si ha

$$\frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} + \vec{\nabla} \Phi - \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} + \frac{c^2}{2} \vec{\nabla} h_{00} = 0 \Rightarrow \vec{\nabla} \left(\Phi + \frac{c^2}{2} h_{00} \right) = 0 \Rightarrow h_{00} = -\frac{2}{c^2} \Phi + cost; \quad (15)$$

il termine costante può essere messo a zero imponendo che all'infinito la perturbazione sia nulla. Questo mostra come, a patto di verificare la (15), le equazioni delle geodetiche contengano le informazioni della legge di gravitazione universale e si riducano a questa nel limite newtoniano.

11 Ricavare le equazioni di Einstein sapendo che, nel limite newtoniano, le equazioni delle geodetiche mostrano che $g_{00} = -(1 + 2\frac{\Phi}{c^2})$, in cui Φ è il potenziale newtoniano soluzione dell'equazione di Laplace $\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho$

L'equazione (13), valida nel limite di campo debole e stazionario e materia non relativistica ci consente di scrivere (ricordando che $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ e che $T_{00} = \rho c^2$ nel limite non relativistico)

$$g_{00} = -(1 + 2\frac{\Phi}{c^2}) \Rightarrow \nabla^2 g_{00} = -\frac{2}{c^2} \nabla^2 \Phi = -\frac{8\pi G\rho}{c^2} \Rightarrow \nabla^2 g_{00} = -\frac{8\pi G}{c^4} T_{00},$$

quest'equazione non è Lorentz-invariante, tanto meno invariante sotto diffeomorfismi, e per tanto deve essere scartata (violerebbe il principio di general covarianza). Essa ci fornisce, però, una forma di base sulla quale cercare di costruire le equazioni di campo, $E_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$.

La domanda ora è: che proprietà deve avere la quantità $E_{\mu\nu}$? La risposta si ottiene da una breve analisi dimensionale, dalle proprietà del tensore energia-impulso e dalle considerazioni fatte nel caso di campo debole statico in regime non relativistico:

1. Deve essere un tensore per soddisfare il principio di general covarianza;
2. Deve soddisfare la proprietà di simmetria del tensore energia-impulso, ossia $E_{\mu\nu} = E_{\nu\mu}$;
3. Nel limite di campo debole e stazionario, la componente E_{00} deve ridursi a $-\nabla^2 g_{00}$;
4. Per quanto detto nel punto precedente e con riferimento all'equazione di Laplace, $E_{\mu\nu}$ deve avere le dimensioni di $\frac{1}{[l^2]}$ per cui le uniche derivate possibili per costruire il tensore $E_{\mu\nu}$ sono le derivate seconde e prodotti di due derivate prime del tensore metrico (se ci fossero altri tipi di derivate o combinazioni diverse le dimensioni andrebbero aggiustate moltiplicando o dividendo per una certa potenza della lunghezza, il che comporterebbe la dipendenza delle equazioni dalla scala di lunghezza che si sta osservando);
5. Deve avere la stessa derivata covariante del tensore energia-impulso, ossia $E_{;\mu}^{\mu\nu} = 0$.

Il tensore che ci viene in mente con la struttura richiesta dal quarto punto è il tensore di Riemann, ma esso è di rango 4 mentre noi cerchiamo un tensore di rango 2; le alternative che ci rimangono sono solo due:

- Tensore di Ricci, $R_{\mu\nu}$;
- Scalare di Ricci moltiplicato per la metrica, $g_{\mu\nu}R$;

per cui il tensore $E_{\mu\nu}$ più generico, soddisfacente le richieste 1,2 e 4, ha la forma

$$E_{\mu\nu} = AR_{\mu\nu} + Bg_{\mu\nu}R,$$

con A e B costanti da determinare sfruttando le richieste 4 e 5. Dalla richiesta 5 abbiamo che (ricordando che la derivata covariante della metrica è nulla)

$$E_{;\mu}^{\mu\nu} = AR_{;\mu}^{\mu\nu} + Bg^{\mu\nu}R_{;\mu} = R_{;\mu}^{\mu\nu} + \frac{B}{A}g^{\mu\nu}R_{;\mu} = \left(R^{\mu\nu} + \frac{B}{A}g^{\mu\nu}R\right)_{;\mu} = 0;$$

ma dalla (5) sappiamo che questa condizione è verificata se e solo se $\frac{B}{A} = -\frac{1}{2}$; a questo punto ci basta determinare A dato che, grazie all'informazione precedente,

$$E_{\mu\nu} = A\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R\right) = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}. \quad (16)$$

Sfruttando la condizione 3 abbiamo che

$$E_{00} = A\left(R_{00} - \frac{1}{2}g_{00}R\right) = -\nabla^2 g_{00},$$

quindi dobbiamo calcolare R_{00} e R . Siccome stiamo lavorando al primo ordine nella perturbazione $h_{\mu\nu}$, nel tensore di Riemann tutti i termini dati da prodotti dei simboli di Christoffel saranno del secondo ordine e quindi trascurabili, quindi

$$\begin{aligned} R_{\beta\mu\nu}^\alpha &= \Gamma_{\beta\nu,\mu}^\alpha - \Gamma_{\beta\mu,\nu}^\alpha \Rightarrow R_{\beta\nu} = \Gamma_{\beta\nu,\mu}^\mu - \Gamma_{\beta\mu,\nu}^\mu = \frac{1}{2}g^{\mu\lambda}[-g_{\beta\nu,\lambda\mu} + g_{\lambda\beta,\nu\mu} + g_{\nu\lambda,\beta\mu} - [-g_{\beta\mu,\lambda\nu} + g_{\lambda\beta,\mu\nu} + g_{\mu\lambda,\beta\nu}]] = \\ &= \frac{1}{2}g^{\nu\lambda}[-g_{\beta\nu,\lambda\mu} + g_{\nu\lambda,\beta\mu} + g_{\beta\mu,\lambda\nu} - g_{\mu\lambda,\beta\nu}] \Rightarrow R_{00} = \frac{1}{2}g^{\mu\lambda}[-g_{00,\lambda\mu} + g_{0\lambda,0\mu} + g_{0\mu,\lambda 0} - g_{\mu\lambda,00}] \Rightarrow \\ &\Rightarrow -\frac{1}{2}\eta^{ij}g_{00,ij} = -\frac{1}{2}\nabla^2 g_{00}, \end{aligned}$$

in cui si è tenuto solo il termine dominante delle derivate dei simboli della connessione e si sono poste a zero le derivate temporali dato che lavoriamo nel limite di campo stazionario.

Dobbiamo ancora determinare lo scalare di Ricci; prima di tutto notiamo che nel limite di campo debole $|T_{ij}| \ll |T_{00}|$ per cui se calcoliamo la traccia del tensore energia-impulso otteniamo (assumendo che esso sia di ordine pari a quello della perturbazione essendo la sorgente della perturbazione stessa)

$$T = T^\mu_\mu \approx \eta^{\mu\nu} T_{\mu\nu} = -T_{00} + \delta^{ij} T_{ij} \approx -T_{00}.$$

A questo punto calcoliamo la traccia dell'equazione (16), ricordando che $Tr(g_{\mu\nu}) = 4$,

$$g^{\mu\nu} A \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) = g^{\mu\nu} \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \Rightarrow A \left(R - \frac{4}{2} R \right) = \frac{8\pi G}{c^4} T \Rightarrow -AR = -\frac{8\pi G}{c^4} T_{00} = -E_{00} = -A \left(R_{00} - \frac{1}{2} \eta_{00} R \right);$$

nell'ultimo passaggio si è sostituito g_{00} con η_{00} dato che il tensore di Ricci è di ordine della perturbazione. Abbiamo quindi che $R = (R_{00} - \frac{1}{2} \eta_{00} R)$ questo comporta che $R = 2R_{00}$; in definitiva si ha (utilizzando quanto appena trovato e la relazione per la componente 00 del tensore di Ricci)

$$E_{00} = A \left(R_{00} + \frac{1}{2} R \right) = 2AR_{00} \Rightarrow E_{00} = -A \nabla^2 g_{00};$$

la relazione appena determinata fissa, alla luce della richiesta 3, il valore di A : $A = 1$. Sostituendo nella (16) otteniamo le equazioni di campo di Einstein

$$E_{\mu\nu} = \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}, \quad (17)$$

il tensore $E_{\mu\nu}$ è chiamato tensore di Einstein. Nella parte sinistra delle equazioni compaiono i termini legati alla curvatura mentre nella parte destra i termini legati alle sorgenti materiali del campo gravitazionale; le equazioni legano indissolubilmente la gravità alla geometria dello spazio-tempo. Le (17) possono essere scritte in un'altra forma; la traccia del tensore di Einstein è pari a $-R$, per cui otteniamo che $R = -\frac{8\pi G}{c^4} T$ e sostituendo nella (17) abbiamo

$$R_{\mu\nu} + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \frac{8\pi G}{c^4} T = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \Rightarrow R_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right). \quad (18)$$

Come si vede, nel vuoto le equazioni di campo si riducono a $E_{\mu\nu} = 0$ dalla (17) o $R_{\mu\nu} = 0$ dalla (18). Esiste un teorema (teorema di Lovelock) che afferma l'unicità del tensore di Einstein a meno di termini lineari nella metrica; sarebbe quindi possibile aggiungere un termine alle equazioni di campo detto "termine cosmologico" ed ottenere le equazioni nella forma

$$\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \Lambda g_{\mu\nu} \right) = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}.$$

Le equazioni appena scritte non soddisfano alcuni dei requisiti imposti ad inizio paragrafo (non si riducono alle equazioni di Newton nel limite di campo debole, stazionario e regime non relativistico); questo comporta che la costante Λ (oltre a dover avere le dimensioni di un inverso di distanza al quadrato) deve essere talmente piccolo da essere completamente trascurabile su scale non cosmologiche (ad oggi le misure dicono $\Lambda \approx 10^{-52} m^{-2}$). Inizialmente fu inserita da Einstein come termine che potesse dar vita ad un universo statico senza espansione nè contrazione; lavori successivi mostrarono che il modello originario di Einstein non è stabile: qualunque minima perturbazione ne provoca o il collasso o l'espansione. Nel 1929 le osservazioni di Hubble indicarono l'espansione dell'universo e la presenza di una costante cosmologica positiva Λ enormemente piccola; oggi questa costante cosmologica è legata a un'energia oscura, il cui significato fisico è ipoteticamente associato con maggior consenso nella comunità scientifica all'energia del vuoto dovuta alle fluttuazioni quantistiche dello stato di vuoto. Il problema è ancora aperto in quanto la teoria quantistica dei campi predice un valore più grande di quello sperimentalmente osservato.

12 Discutere il problema dell'invarianza di gauge delle equazioni di Einstein

Il tensore metrico è un tensore a due indici simmetrico, per cui possiede 10 componenti indipendenti che possono essere determinate dalle equazioni (17). Sappiamo, tuttavia, che il tensore di Einstein deve soddisfare la condizione di derivata covariante nulla, che rappresenta un set di 4 equazioni e quindi 4 relazioni tra le componenti del tensore $E_{\mu\nu}$. In definitiva le componenti indipendenti del tensore metrico sono 10 ma le equazioni indipendenti sono solo 6 (le equazioni di campo a cui vanno sottratte le relazioni di derivata covariante nulla del tensore di Einstein). Il trucco sta nel fatto che data una soluzione delle equazioni di campo, $g_{\mu\nu}$, siamo sempre liberi di effettuare un diffeomorfismo (un cambio di sistema di riferimento, detto in maniera semplice) e il nuovo tensore metrico trasformato, $g'_{\mu\nu}$, sarà ancora soluzione delle equazioni di campo, in quanto, stando al principio di general covarianza, le equazioni della fisica sono

le stesse in tutti i sistemi di riferimento. In altre parole le due soluzioni descrivono la stessa fisica vista da sistemi di coordinate differenti.

Nello spazio-tempo della relatività generale un diffeomorfismo consta in 4 funzioni arbitrarie che legano le vecchie coordinate alle nuove (le funzioni devono essere sufficientemente regolari), esattamente il numero di gradi di libertà che le equazioni di campo ci lasciano sulle componenti della metrica. Questo vuol dire che le equazioni di campo, e in generale la relatività generale, sono invarianti sotto diffeomorfismi e possiedono quindi una simmetria detta "simmetria di gauge". In definitiva, dato che la fisica deve essere la stessa in tutti i sistemi di riferimento, siamo sempre liberi di scegliere e fissare in quale sistema di coordinate calcolare la soluzione delle equazioni di campo e una volta fissato il sistema di riferimento la fisica che otteniamo è del tutto equivalente alla fisica che otterremo in qualunque altro sistema di coordinate. Tutto questo deriva semplicemente da principio di general covarianza.

Una gauge particolarmente utile (per le sue implicazione sullo studio delle onde gravitazionali) è la gauge armonica nella quale si richiede la condizione che

$$\Gamma^\rho = g^{\mu\nu}\Gamma_{\mu\nu}^\rho = 0.$$

Dalla legge di trasformazione dei simboli della connessione è possibile mostrare come la gauge armonica possa sempre essere soddisfatta, infatti (gli indici α, β e γ indicano le nuove variabili mentre gli indici ρ, μ, ν e σ le nuove variabili)

$$\begin{aligned}\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha &= J_\rho^\alpha J_\beta^\mu J_\gamma^\nu \Gamma_{\mu\nu}^\rho + \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^\sigma} \frac{\partial^2 x^\sigma}{\partial x^\beta \partial x^\gamma} \Rightarrow \Gamma^\alpha = g^{\beta\gamma} \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha = J_\rho^\alpha g^{\beta\gamma} J_\beta^\mu J_\gamma^\nu \Gamma_{\mu\nu}^\rho + g^{\beta\gamma} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^\sigma} \frac{\partial^2 x^\sigma}{\partial x^\beta \partial x^\gamma} = \\ &= J_\rho^\alpha g^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\nu}^\rho + g^{\beta\gamma} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^\sigma} \frac{\partial^2 x^\sigma}{\partial x^\beta \partial x^\gamma} = J_\rho^\alpha \Gamma^\rho + g^{\beta\gamma} \left[\frac{\partial}{\partial x^\beta} \left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial x^\sigma} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x^\gamma} \right) - \frac{\partial x^\sigma}{\partial x^\gamma} \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial x^\beta \partial x^\sigma} \right] = \\ &= J_\rho^\alpha \Gamma^\rho + g^{\beta\gamma} \left[\frac{\partial}{\partial x^\beta} \delta_\gamma^\alpha - \frac{\partial x^\sigma}{\partial x^\gamma} \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial x^\beta \partial x^\sigma} \frac{\partial x^\rho}{\partial x^\rho} \right] = J_\rho^\alpha \Gamma^\rho + g^{\beta\gamma} \left[\frac{\partial}{\partial x^\beta} \delta_\gamma^\alpha - \frac{\partial x^\sigma}{\partial x^\gamma} \frac{\partial x^\rho}{\partial x^\beta} \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial x^\rho \partial x^\sigma} \right] = \\ &= J_\rho^\alpha \Gamma^\rho + g^{\beta\gamma} \left[J_\gamma^\sigma J_\beta^\rho \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial x^\rho \partial x^\sigma} \right] = J_\rho^\alpha \Gamma^\rho - g^{\sigma\rho} \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial x^\rho \partial x^\sigma} \Rightarrow \Gamma^\alpha = J_\rho^\alpha \Gamma^\rho - g^{\sigma\rho} \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial x^\rho \partial x^\sigma},\end{aligned}$$

in cui $J_\rho^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^\rho}$ è la matrice jacobiana della trasformazione. Quindi anche se Γ^ρ non è nella gauge armonica, è sempre possibile trovare una trasformazione di coordinate per cui risulti $\Gamma^\alpha = 0$.

13 Ricavare l'equazione di Killing e mostrare che si può scrivere nella forma $\xi_{\mu;\nu} + \xi_{\nu;\mu} = 0$. Mostrare che se lo spaziotempo ammette un campo di vettori di Killing, si possono scegliere le coordinate in modo da sfruttare le simmetrie ad essi associate.

L'esistenza di simmetrie delle soluzioni è importante per poter semplificare la ricerca ed il calcolo di soluzioni esatte delle equazioni di campo. Dato un certo campo vettoriale, $\vec{\xi}(x^\mu)$, esso identificherà una simmetria se e solo se uno spostamento infinitesimo nella sua direzione non produrrà alcun cambiamento nell'elemento di linea,

$$\delta(ds^2) = \delta(g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu) = \delta(g_{\mu\nu}) dx^\mu dx^\nu + g_{\mu\nu} \delta(dx^\mu) dx^\nu + g_{\mu\nu} \delta(dx^\nu) dx^\mu = 0;$$

dobbiamo calcolare queste variazioni per poter derivare un'equazione che ci dica quanto il campo $\vec{\xi}(x^\mu)$ definisce una simmetria. Ricordiamo, innanzitutto, che in geometria differenziale i vettori sono definiti essere i vettori tangenti a qualche curva $x^\alpha(k)$ (in cui k è il parametro della curva); quindi muoversi di una quantità infinitesima nella direzione di $\vec{\xi}(x^\mu)$ è equivalente a spostarsi dal punto $P(k)$ al punto $P(k + \delta k)$ lungo la curva il cui vettore tangente è $\vec{\xi}(x^\mu)$. Calcoliamo la variazione delle coordinate quando ci muoviamo di una quantità infinitesima del parametro (sviluppando con Taylor)

$$\delta(x^\alpha) = x^\alpha(k + \delta k) - x^\alpha(k) = \frac{dx^\alpha}{dk} \delta k = \xi^\alpha dk;$$

per cui

$$\delta(dx^\alpha) = d\delta(x^\alpha) = d(\xi^\alpha dk) = d\xi^\alpha dk = \xi_{,\mu}^\alpha dx^\mu dk,$$

allo stesso modo

$$\delta(g_{\mu\nu}) = g_{\mu\nu}(x^\alpha + \delta(x^\alpha)) - g_{\mu\nu}(x^\alpha) = g_{\mu\nu}(x^\alpha) + \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\rho} \delta(x^\rho) - g_{\mu\nu}(x^\alpha) = g_{\mu\nu,\rho} \frac{\partial x^\rho}{\partial k} dk = g_{\mu\nu,\rho} \xi^\rho dk.$$

Sostituendo le ultime due relazioni trovare nella prima equazione del paragrafo otteniamo

$$\begin{aligned}g_{\mu\nu,\rho} \xi^\rho dk dx^\mu dx^\nu + g_{\mu\nu} \xi_{,\beta}^\mu dx^\beta dk dx^\nu + g_{\mu\nu} \xi_{,\beta}^\nu dx^\beta dk dx^\mu &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow g_{\mu\nu,\rho} \xi^\rho dk dx^\mu dx^\nu + g_{\beta\nu} \xi_{,\mu}^\beta dx^\mu dk dx^\nu + g_{\mu\beta} \xi_{,\nu}^\beta dx^\nu dk dx^\mu &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow [g_{\mu\nu,\rho} \xi^\rho + g_{\beta\nu} \xi_{,\mu}^\beta + g_{\mu\beta} \xi_{,\nu}^\beta] dx^\nu dk dx^\mu &= 0 \Rightarrow g_{\mu\nu,\rho} \xi^\rho + g_{\beta\nu} \xi_{,\mu}^\beta + g_{\mu\beta} \xi_{,\nu}^\beta = 0;\end{aligned}\tag{19}$$

quando questa equazione è soddisfatta il campo vettoriale $\vec{\xi}(x^\mu)$ è un campo vettoriale lungo il quale la soluzione delle equazioni di campo è invariante e, per tanto, definisce una simmetria. L'equazione (19) è detta equazione di Killing e i campi vettoriali $\vec{\xi}(x^\mu)$ che la soddisfano sono detti campi di Killing. La (19) può essere riscritta come $\xi_{\mu;\nu} + \xi_{\nu;\mu} = 0$, infatti

$$\begin{aligned}
\xi_{\mu;\nu} + \xi_{\nu;\mu} &= (g_{\alpha\mu}\xi^\alpha)_{;\nu} + (g_{\alpha\nu}\xi^\alpha)_{;\mu} = g_{\alpha\mu}\xi_{;\nu}^\alpha + g_{\alpha\nu}\xi_{;\mu}^\alpha = g_{\alpha\mu}(\xi_{,\nu}^\alpha + \Gamma_{\beta\nu}^\alpha\xi^\beta) + g_{\alpha\nu}(\xi_{,\mu}^\alpha + \Gamma_{\beta\mu}^\alpha\xi^\beta) = \\
&= g_{\alpha\mu}\xi_{,\nu}^\alpha + g_{\alpha\nu}\xi_{,\mu}^\alpha + (g_{\alpha\mu}\Gamma_{\beta\nu}^\alpha + g_{\alpha\nu}\Gamma_{\beta\mu}^\alpha)\xi^\beta = \\
&= g_{\alpha\mu}\xi_{,\nu}^\alpha + g_{\alpha\nu}\xi_{,\mu}^\alpha + \left(\frac{1}{2}g_{\alpha\mu}g^{\alpha\rho}(-g_{\beta\nu,\rho} + g_{\rho\beta,\nu} + g_{\nu\rho,\beta}) + \frac{1}{2}g_{\alpha\nu}g^{\alpha\rho}(-g_{\beta\mu,\rho} + g_{\rho\beta,\mu} + g_{\mu\rho,\beta})\right)\xi^\beta = \\
&= g_{\alpha\mu}\xi_{,\nu}^\alpha + g_{\alpha\nu}\xi_{,\mu}^\alpha + \frac{1}{2}(\delta_\mu^\rho(-g_{\beta\nu,\rho} + g_{\rho\beta,\nu} + g_{\nu\rho,\beta}) + \delta_\nu^\rho(-g_{\beta\mu,\rho} + g_{\rho\beta,\mu} + g_{\mu\rho,\beta}))\xi^\beta = \\
&= g_{\alpha\mu}\xi_{,\nu}^\alpha + g_{\alpha\nu}\xi_{,\mu}^\alpha + \frac{1}{2}(-g_{\beta\nu,\mu} + g_{\mu\beta,\nu} + g_{\nu\mu,\beta} - g_{\beta\mu,\nu} + g_{\nu\beta,\mu} + g_{\mu\nu,\beta})\xi^\beta = \\
&= g_{\alpha\mu}\xi_{,\nu}^\alpha + g_{\alpha\nu}\xi_{,\mu}^\alpha + g_{\mu\nu,\beta}\xi^\beta;
\end{aligned}$$

che coincide con la (19). Quindi l'equazione di Killing può scriversi come

$$\xi_{\mu;\nu} + \xi_{\nu;\mu} = 0; \quad (20)$$

la (20) ci dice che la derivata covariante (e quindi la derivata ordinaria) del campo di Killing è antisimmetrica. L'esistenza di campi vettoriali di Killing è di sostanziale importanza per la risoluzione delle equazioni di campo: dato un certo campo di Killing è possibile scegliere un sistema di coordinate in modo tale da sfruttare appieno le semplificazioni dovute alla simmetria del problema e legate appunto ai campi di Killing. Consideriamo di avere un campo di Killing di tipo tempo, $\vec{\xi}$, allora potremmo scegliere come sistema di coordinate uno in cui il vettore di base di tipo tempo, $\vec{e}_{(0)}$, sia in ogni punto allineato al campo $\vec{\xi}$. In questo riferimento le componenti del campo vettoriale sono $\xi^\alpha = (\xi^0, 0, 0, 0)$ e se parametrizziamo la curva a cui il campo vettoriale è associato in maniera tale che risulti $\xi^0 = 1$ allora la metrica, grazie all'equazione di Killing (19), è indipendente dal tempo e quindi stazionaria (tutte le derivate di ξ^α sono nulle e la sua unica componente diversa da zero è quella temporale). Un ragionamento analogo si può fare nel caso di campo di Killing di tipo spazio: in questo caso allineando uno dei vettori di base di tipo spazio ($\vec{e}_{(1)}, \vec{e}_{(2)}, \vec{e}_{(3)}$) al campo, la metrica (sempre grazie alla equazione (19)) risulterà indipendente dalla coordinata corrispondente al vettore di base allineato al campo di Killing. Nel caso di campo vettoriale di tipo luce bisogna prima di tutto operare una trasformazione dei vettori di base, $\vec{e}_{(\alpha)} = J_\alpha^\beta \vec{e}_{(\beta)}$, in maniera da ottenere uno di tipo luce poi da allineare con il campo di Killing ed ottenere una metrica indipendente dalla coordinata associata al vettore di base scelto.

L'esistenza di campi di Killing è quindi molto importante per la ricerca di soluzioni esatte delle equazioni di Einstein; le trasformazioni generate dai campi di Killing sotto le quali la metrica è invariante sono dette isometrie. I campi di Killing sono, quindi, i generatori delle isometrie dello spazio-tempo. Ad esempio in uno spazio-tempo piatto la risoluzione della (20) porta a 10 campi di Killing indipendenti corrispondenti ai generatori delle trasformazioni di Poincaré (ossia alle isometrie dello spazio-tempo piatto).

14 Mostrare che se una metrica ammette dei vettori di Killing si possono associare quantità conservate al moto geodetico e al tensore energia-impulso

Ci aspettiamo che ad ogni simmetria sia associata una quantità conservata, nello spazio-tempo curvo questa implicazione può essere nascosta se non si sceglie adeguatamente il sistema di riferimento. Quanto diremo vale sia per una particella massiva sia per una particella non massiva con l'unica differenza che, nel secondo caso, il parametro affine non potrà essere il tempo proprio.

Consideriamo l'equazione delle geodetiche

$$\frac{dU^\alpha}{dq} + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha U^\mu U^\nu = 0$$

in cui $U^\beta = \frac{dx^\beta}{dq}$ è la quadrivelocità della particella lungo la geodetica considerata; contraiamo l'equazione sopra con un ipotetico campo di Killing ξ^α

$$\begin{aligned}
\xi_\alpha \left(\frac{dU^\alpha}{dq} + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha U^\mu U^\nu \right) &= \frac{d(\xi_\alpha U^\alpha)}{dq} - U^\alpha \frac{d\xi_\alpha}{dq} + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha U^\mu U^\nu \xi_\alpha = \frac{d(\xi_\alpha U^\alpha)}{dq} - U^\alpha \frac{d\xi_\alpha}{dx^\beta} \frac{dx^\beta}{dq} + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha U^\mu U^\nu \xi_\alpha = \\
&= \frac{d(\xi_\alpha U^\alpha)}{dq} - U^\rho U^\sigma \left(\frac{d\xi_\rho}{dx^\sigma} - \Gamma_{\rho\sigma}^\alpha \xi_\alpha \right) = \frac{d(\xi_\alpha U^\alpha)}{dq} - U^\rho U^\sigma \xi_{\rho;\sigma} = \frac{d(\xi_\alpha U^\alpha)}{dq} = 0;
\end{aligned}$$

nel terzo passaggio abbiamo richiamato gli indici muti e notato che $\frac{dx^\beta}{dq}$ è la quadrirelatività della particella, nel quinto passaggio abbiamo annullato il termine $U^\rho U^\sigma \xi_{\rho;\sigma}$ dato che $U^\rho U^\sigma$ è un tensore simmetrico mentre $\xi_{\rho;\sigma}$ è antisimmetrico. L'equazione appena trovata ci dice che la quantità $\xi_\alpha U^\alpha$ è costante lungo la geodetica, infatti

$$\xi_\alpha U^\alpha = g_{\alpha\mu} \xi^\mu U^\alpha = cost. \quad (21)$$

A seconda della natura del campo di Killing e assumendo una metrica asintoticamente piatta, possiamo definire quantità conservate differenti associate al moto geodetico:

- campo vettoriale di tipo tempo: nel paragrafo precedente abbiamo visto come in questo caso è possibile scrivere il campo di Killing nella forma $\xi^\mu = (\xi^0, 0, 0, 0) = (1, 0, 0, 0)$, per cui abbiamo $g_{\alpha 0} \xi^0 U^\alpha = g_{\alpha 0} U^\alpha = cost$ che nel limite di metrica piatta diventa $\eta_{\alpha 0} U^\alpha = \eta_{00} U^0 = U^0 = cost$. Poichè sia per particelle massive che per particelle prive di massa la componente U^0 è legata, in qualche modo, all'energia, questa condizione ci dice che l'energia della particella è costante. Quindi campi di Killing di tipo tempo sono associati alla conservazione dell'energia della particella.
- campo vettoriale di tipo spazio: nel paragrafo precedente abbiamo visto come in questo caso è possibile scrivere il campo di Killing nella forma, ad esempio, $\xi^\mu = (0, \xi^1, 0, 0) = (0, 1, 0, 0)$, per cui abbiamo $g_{\alpha 1} \xi^1 U^\alpha = g_{\alpha 1} U^\alpha = cost$ che nel limite di metrica piatta diventa $\eta_{\alpha 1} U^\alpha = \eta_{11} U^1 = -U^1 = cost$. Poichè sia per particelle massive che per particelle prive di massa la componente U^1 è legata, in qualche modo, all'impulso, questa condizione ci dice che l'impulso della particella è costante. Quindi campi di Killing di tipo spazio sono associati alla conservazione dell'impulso della particella.

Così come abbiamo associato grandezze conservate al moto geodetico possiamo associarne al tensore energia-impulso. Sappiamo che il tensore in questione deve soddisfare la relazione $T_{;\nu}^{\mu\nu}$; contraendo questa relazione con il campo di Killing ξ_μ e sommando il termine identicamente nullo (per via della simmetria del tensore energia-impulso e della antisimmetria della derivata covariante del campo di Killing) $\xi_{\mu;\nu} T^{\mu\nu}$, otteniamo

$$\begin{aligned} 0 &= \xi_\mu T_{;\nu}^{\mu\nu} + \xi_{\mu;\nu} T^{\mu\nu} = (\xi_\mu T^{\mu\nu})_{;\nu} = (\xi_\mu T^{\mu\nu})_{,\nu} + \Gamma_{\alpha\nu}^\nu (\xi_\mu T^{\mu\alpha}) = \\ &= (\xi_\mu T^{\mu\nu})_{,\nu} + \frac{1}{2} g^{\gamma\nu} [-g_{\alpha\nu,\gamma} + g_{\gamma\alpha,\nu} + g_{\nu\gamma,\alpha}] (\xi_\mu T^{\mu\alpha}) = (\xi_\mu T^{\mu\nu})_{,\nu} + \frac{1}{2} g^{\gamma\nu} g_{\nu\gamma,\alpha} (\xi_\mu T^{\mu\alpha}) = \\ &= (\xi_\mu T^{\mu\nu})_{,\nu} + \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} (\sqrt{-g}) \xi_\mu T^{\mu\alpha} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x^\alpha} (\sqrt{-g} (\xi_\mu T^{\mu\alpha})) = 0. \end{aligned}$$

La relazione appena trovata è una quadridivergenza; per cui possiamo integrare su un volume arbitrario V , applicare il teorema di Gauss alla divergenza spaziale trasformandola in un integrale di flusso ed annullarlo richiedendo che il vettore $(\xi_\mu T^{\mu\alpha})$ si annulli sul contorno di integrazione ∂V . Questi passaggi ci consentono di scrivere delle quantità conservate nella forma

$$T = \int \sqrt{-g} (\xi_\mu T^{\mu 0}) dV, \quad (22)$$

anche qui a seconda che il campo di Killing sia di tipo tempo o di tipo spazio otteniamo rispettivamente la conservazione dell'energia (legata alla componente T^{00}) o dell'impulso (legato alle componenti T^{i0} con $i = 1, 2, 3$).

15 Definire cos'è un campo vettoriale ortogonale a una famiglia di ipersuperfici e mostrare come l'esistenza di un campo vettoriale che goda di questa proprietà consente di semplificare la forma del tensore metrico

Un campo vettoriale, V^α , si definisce ortogonale ad una famiglia di ipersuperfici se le sue linee di campo di tipo tempo risultano in ogni punto ortogonali ad una famiglia di ipersuperfici $f(x^\alpha) = \text{cost}$. Questa condizione (vedere figura 2) è equivalente al richiedere che il campo vettoriale sia ortogonale in ogni punto ai vettori tangenti dell'ipersuperficie; ossia, detta $x^\alpha(s)$ una qualunque curva giacente sull' ipersuperficie $f(x^\alpha) = \text{cost}$ e $t^\alpha = \frac{dx^\alpha}{ds}$ il suo vettore tangente, si deve avere $t^\alpha V_\alpha = 0$.

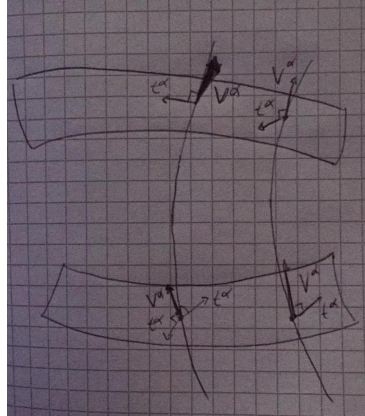


Figura 2: Le linee di campo di tipo tempo sono ortogonali alla famiglia di ipersuperfici o equivalentemente il campo vettoriale è ortogonale ai vettori tangenti a tutte le curve appartenenti alle ipersuperfici

Come conseguenza il campo vettoriale V^α è parallelo al gradiente di $f(x^\alpha)$, infatti dato che l'ipersuperficie è costante la sua variazione lungo la curva $x^\alpha(s)$ è nulla, quindi

$$\frac{df(x^\alpha)}{ds} = \frac{\partial f(x^\alpha)}{\partial x^\alpha} \frac{dx^\alpha}{ds} = f(x^\alpha)_{,\alpha} t^\alpha = k V_\alpha t^\alpha = 0;$$

in cui k è una funzione delle coordinate. L'esistenza di campi vettoriali ortogonali a famiglie di ipersuperfici permette di semplificare la scrittura della metrica e quindi dell'elemento di linea. Dato un campo vettoriale con questa proprietà, che sia di tipo tempo, spazio o luce, è sempre possibile scegliere un sistema di riferimento in cui uno dei vettori di base è allineato alla direzione del campo vettoriale dato, mentre gli altri sono scelti come i vettori tangenti a qualche curva dell'ipersuperficie. In questo modo il prodotto scalare tra i vettori di base corrispondenti a vettori tangenti di qualche curva appartenente all'ipersuperficie e il vettore di base allineato al campo vettoriale è nullo per costruzione (si ricordi che il campo vettoriale possiede la proprietà di essere ortogonale a tutti i vettori tangenti delle curve appartenenti all'ipersuperficie). Dato che le componenti del tensore metrico altro non sono che i prodotti scalari tra i vettori di base, la costruzione appena esposta elimina alcune componenti.

16 Ricavare la forma generale che deve avere la metrica che descrive uno spazio-tempo statico e a simmetria sferica

Stiamo cercando la soluzione per uno spazio-tempo statico e a simmetria sferica; la staticità è dovuta all'esistenza di un campo di Killing di tipo tempo, ortogonale ad una famiglia di ipersuperfici. Per quanto discusso nella sezione precedente è possibile scegliere un sistema di coordinate in cui le componenti g_{0i} del tensore metrico sono tutte identicamente nulle. Per quanto riguarda la simmetria sferica; l'idea è quella di mappare lo spazio in coordinate sferiche (r, θ, ϕ) . In questo caso possiamo trovare un campo vettoriale ortogonale ad una famiglia di sfere concentriche (ad esempio, il campo vettoriale che mappa un punto (r, θ, ϕ) di una sfera nel punto $(r + \delta r, \theta, \phi)$ di un'altra sfera) e di conseguenza possiamo scegliere di allineare il vettore di base \vec{e}_r alla direzione del campo e di prendere i vettori di base \vec{e}_θ e \vec{e}_ϕ ortogonali al campo e quindi a \vec{e}_r . L'elemento di linea sarà per tanto della forma

$$ds^2 = g_{00}(dx^0)^2 + g_{rr}(dr)^2 + r^2[(d\theta)^2 + \sin^2(\theta)(d\phi)^2],$$

in cui la parte angolare è dedotta considerando gli spostamenti possibili su di una superficie sferica (figura 3).

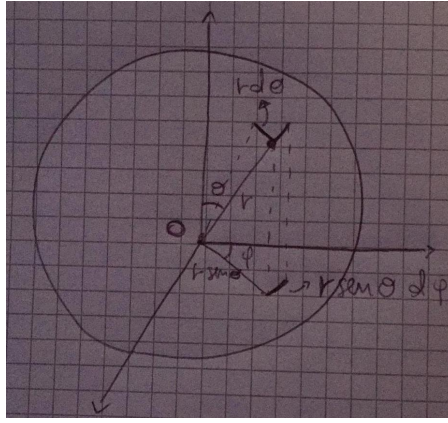


Figura 3: Spostamenti possibili su una superficie sferica

Le componenti g_{00} e g_{rr} dipendono solo dalla coordinata radiale in quanto se facessimo una trasformazione $(\theta, \phi) \Rightarrow (\theta', \phi')$ i vettori di base \vec{e}_r e \vec{e}_θ non cambierebbero e quindi non possono dipendere dalle coordinate angolari. In definitiva possiamo scrivere l'elemento di linea come

$$ds^2 = -e^{2\nu(r)}(dx^0)^2 + e^{2\lambda(r)}(dr)^2 + r^2[(d\theta)^2 + \sin^2(\theta)(d\phi)^2]. \quad (23)$$

17 Data la metrica che descrive uno spaziotempo statico e a simmetria sferica $ds^2 = -e^{2\nu(r)}(dx^0)^2 + e^{2\lambda(r)}(dr)^2 + r^2[(d\theta)^2 + \sin^2(\theta)(d\phi)^2]$, e date le equazioni di Einstein che deve soddisfare $E_{00} = \frac{1}{r^2}e^{2\nu} \frac{d}{dr} [r(1 - e^{-2\lambda})]$, $E_{rr} = -\frac{1}{r^2}e^{2\lambda} [(1 - e^{-2\lambda})] + \frac{2}{r}\nu_{,r}$, $E_{\theta\theta} = r^2e^{-2\lambda} [\nu_{,rr} + \nu_{,r}^2 + \frac{\nu_{,r}}{r} - \nu_{,r}\lambda_{,r} - \frac{\lambda_{,r}}{r}]$, $E_{\phi\phi} = \sin^2(\theta)E_{\theta\theta}$ ricavare la soluzione di Schwarzschild.

La metrica di Schwarzschild descrive lo spazio-tempo al di fuori di un oggetto di simmetria sferica; le equazioni di campo da risolvere si scrivono $E_{\mu\nu} = 0$ e le uniche componenti del tensore di Einstein non nulle sono quelle riportate nella domanda. Dall'equazione $E_{00} = \frac{1}{r^2}e^{2\nu} \frac{d}{dr} [r(1 - e^{-2\lambda})] = 0$ otteniamo

$$\frac{d}{dr} [r(1 - e^{-2\lambda})] = 0 \Rightarrow r(1 - e^{-2\lambda}) = C_1 \Rightarrow (-e^{-2\lambda}) = \frac{C_1}{r} - 1 \Rightarrow e^{2\lambda} = \frac{1}{1 - \frac{C_1}{r}},$$

in cui C_1 è una costante di integrazione; sostituendo l'espressione appena trovata nell'equazione $E_{rr} = -\frac{1}{r^2}e^{2\lambda} [(1 - e^{-2\lambda})] + \frac{2}{r}\nu_{,r} = 0$ si ottiene

$$E_{rr} = -\frac{1}{r^2} \left(\frac{1}{1 - \frac{C_1}{r}} \right) \left(\frac{C_1}{r} \right) + \frac{2}{r}\nu_{,r} = 0 \Rightarrow 2\nu_{,r} = \frac{1}{r} \left(\frac{\frac{C_1}{r}}{1 - \frac{C_1}{r}} \right) = \left(\frac{\frac{C_1}{r^2}}{1 - \frac{C_1}{r}} \right) \Rightarrow \nu_{,r} = \frac{1}{2} \left(\frac{\frac{C_1}{r^2}}{1 - \frac{C_1}{r}} \right).$$

Integrando l'espressione trovata si ottiene

$$\nu = \frac{1}{2} \log \left(1 - \frac{C_1}{r} \right) + C_2 \Rightarrow e^{2\nu} = \left(1 - \frac{C_1}{r} \right) e^{2C_2} \Rightarrow e^{2\nu} = \left(1 - \frac{C_1}{r} \right),$$

in cui C_2 è una costante di integrazione e nell'ultimo passaggio si è fatto un riscalamento della coordinata temporale in modo da eliminare il contributo costante. Sostituendo il tutto nella (23) otteniamo la metrica di Schwarzschild

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{C_1}{r} \right) (dx^0)^2 + \left(\frac{1}{1 - \frac{C_1}{r}} \right) (dr)^2 + r^2[(d\theta)^2 + \sin^2(\theta)(d\phi)^2],$$

nella quale comparare ancora la costante di integrazione. Sappiamo, però, che nel limite newtoniano (in questo caso a distanze r molto grandi rispetto al raggio dell'oggetto sorgente del campo) la componente $g_{00} \approx -\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right)$ (in cui M è la massa dell'oggetto sorgente del campo), confrontando con la componente g_{00} della metrica di Schwarzschild otteniamo

$$-\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right) = -\left(1 - \frac{C_1}{r} \right) \Rightarrow \frac{2GM}{c^2 r} = \frac{C_1}{r} \Rightarrow C_1 = \frac{2GM}{c^2}.$$

Alla fine, la metrica di Schwarzschild prende la forma

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2 (dt)^2 + \left(\frac{1}{1 - \frac{2GM}{c^2 r}}\right) (dr)^2 + r^2 [(d\theta)^2 + \sin^2(\theta)(d\phi)^2], \quad (24)$$

notiamo che nel limite $r \rightarrow \infty$ la metrica (24) tende alla metrica piatta di Minkowski e per questo la metrica di Schwarzschild è detta essere asintoticamente piatta. La soluzione (24) descrive uno spazio-tempo statico a simmetria sferica ossia il campo gravitazionale generato da un oggetto non rotante a simmetria sferica; tuttavia, per il teorema di Birkoff, la metrica di Schwarzschild risulta essere l'unica soluzione nel vuoto delle equazioni di campo a simmetria sferica e asintoticamente piatta. Per mostrarlo sono sufficienti solo due componenti del tensore di Ricci calcolate immaginando che le funzioni ν e λ dipendano dalla coordinata radiale e dalla coordinata temporale (si ricordi che nel vuoto le equazioni di campo hanno le due forme equivalenti $E_{\mu\nu} = 0$ e $R_{\mu\nu} = 0$). Le componenti che ci interessano sono

$$R_{0r} = \frac{2}{r} \frac{\partial \lambda}{\partial x^0} = 0;$$

$$R_{\theta\theta} = 1 - e^{-2\lambda} \left[1 + r \frac{\partial(\nu - \lambda)}{\partial r} \right] = 0,$$

dalla prima ricaviamo che la funzione λ non dipende dal tempo; andando a derivare la seconda rispetto al tempo e sfruttando la condizione appena trovata, si vede che anche $\frac{\partial \nu}{\partial r}$ è indipendente dal tempo per cui segue $\nu(r, x^0) = \nu_r(r) + \nu_t(x^0)$. Questo significa che il termine a moltiplicare $(dx^0)^2$ nella (23) sarebbe fatto da un pezzo dipendente solo da r e di uno dipendente solo dalla coordinata temporale, ma siamo sempre liberi di riassorbire quest'ultimo operando un riscaldamento della coordinata temporale; ne segue che anche se il corpo centrale evolve nel tempo la metrica al di fuori dell'oggetto sorgente deve essere la metrica di Schwarzschild.

Per lavorare con la metrica (24) è utile definire le unità geometriche in cui la velocità della luce e la costante di gravitazione sono poste uguali all'unità ($c = G = 1$); come conseguenza misureremo le masse in unità di lunghezza. La (24) si riscrive come

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2m}{r}\right) (dt)^2 + \left(\frac{1}{1 - \frac{2m}{r}}\right) (dr)^2 + r^2 [(d\theta)^2 + \sin^2(\theta)(d\phi)^2]; \quad (25)$$

notiamo dalla (25) o dalla (24) che la metrica di Schwarzschild possiede delle singolarità, infatti per $r = 0$ e $r = 2m$ la metrica non è definita in quanto il tensore metrico risulta avere determinante nulla e quindi essere singolare. Tra le due singolarità esiste però una differenza sostanziale; la prima ($r = 0$) è detta singolarità di curvatura perchè tutti gli invarianti di curvatura divergono quando calcolati in quel punto, nel secondo caso ($r = 2m$) gli invarianti non divergono tutti (ad esempio lo scalare di Kretschmann vale $K = \frac{3}{4m^4}$) e si parla di singolarità di coordinate nel senso che è una singolarità dovuta alla scelta non appropriata delle coordinate.

18 Discutere la natura delle ipersuperfici in Relatività Generale e, data la metrica di Schwarzschild $ds^2 = -\left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 + \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{2m}{r}\right)} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2(\theta) d\phi^2$. Spiegare perchè la superficie $r = 2m$ è un orizzonte degli eventi

Prima di tutto classifichiamo le ipersuperfici dello spazio-tempo in relatività generale; data la generica ipersuperficie, $f(x^\mu) = cost$, definiamo il suo gradiente, $n_\alpha = f(x^\mu)_{,\alpha}$ e ricordiamo che il vettore duale al gradiente è normale in ogni punto all'ipersuperficie. Introduciamo, ora, un LIF in ogni punto della nostra ipersuperficie in modo tale da poter porre il vettore normale nella forma

$$n^\alpha = (n^0, n^1, 0, 0) \Rightarrow n_\alpha n^\alpha = -(n^0)^2 + (n^1)^2.$$

A questo punto prendiamo in considerazione un vettore tangente all'ipersuperficie, t^α ; sappiamo che questo deve essere ortogonale al vettore normale per cui imponendo l'ortogonalità possiamo ottenere informazioni sulla forma di t^α :

$$n_\alpha t^\alpha = -n_0 t^0 + n_1 t^1 = 0 \Rightarrow t^\alpha = a(n^1, n^0, b, c),$$

in cui a, b e c sono costanti arbitrarie. La norma del vettore tangente è, pertanto

$$t_\alpha t^\alpha = a^2 (-(n^1)^2 + (n^0)^2 + b^2 + c^2) = a^2 (-n_\alpha n^\alpha + b^2 + c^2),$$

quindi dipende dalla norma del vettore normale. Abbiamo tre casistiche possibili (vedere anche figura 4):

- $n_\alpha n^\alpha < 0$: la norma di t^α è positiva ed è quindi un vettore di tipo spazio, ne segue che preso un punto generico sull'ipersuperficie, che individua un vettore normale, non esiste nessun vettore tangente all'ipersuperficie che si trovi nel cono luce del punto scelto. Conseguentemente, dato che una particella può muoversi solo all'interno del cono luce, l'ipersuperficie può essere attraversata solo in una direzione; ipersuperfici con queste caratteristiche sono dette di tipo spazio;
- $n_\alpha n^\alpha > 0$: la norma di t^α dipende dai valori delle costanti b^2 e c^2 , e il vettore tangente può essere di tipo spazio, tempo o luce. In generale, quindi, potranno esistere vettori tangenti che si trovano nel cono luce individuato da un generico punto dell'ipersuperficie e quindi una particella potrà attraversare in entrambe le direzioni l'ipersuperficie stessa. Ipersuperfici con queste caratteristiche sono dette di tipo tempo;
- $n_\alpha n^\alpha = 0$: la norma di t^α dipende ancora dai valori delle costanti b^2 e c^2 , in questo caso però, la norma, potrà essere solo positiva o nulla e quindi t^α sono di tipo spazio o luce. In generale potranno esistere vettori tangenti che però sono le delimitazioni del cono luce individuato da un punto generico dell'ipersuperficie; il cono luce sarà, quindi, accasciato sull'ipersuperficie stessa e la particella non potrà attraversare mai l'ipersuperficie in entrambe le direzioni ma al massimo muovercisi sopra. Ipersuperfici con queste caratteristiche sono dette di tipo luce.

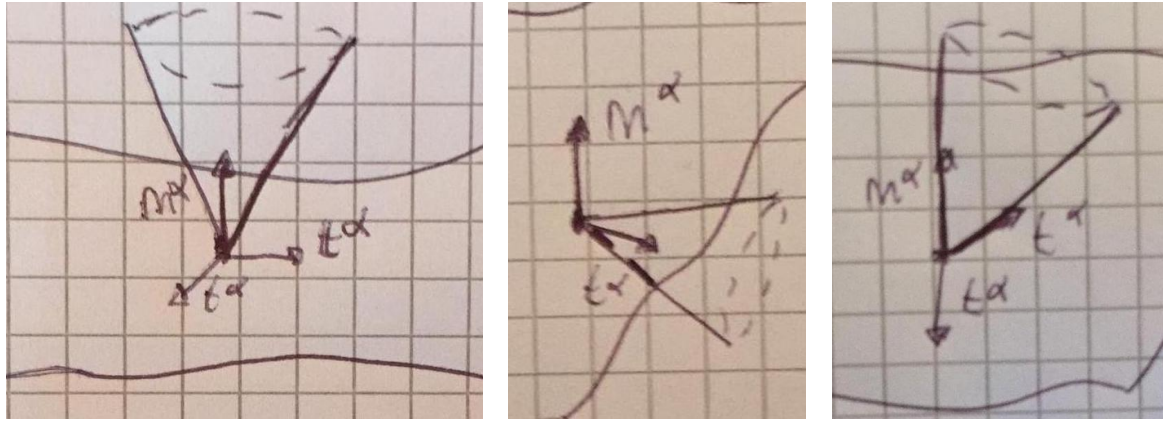


Figura 4: Tipologie di ipersuperfici in relatività generale. A sinistra: ipersuperficie di tipo spazio, il cono luce è al di fuori della ipersuperficie ed è possibile attraversarla solo in una direzione. Al centro: ipersuperficie di tipo tempo, il cono luce interseca l'ipersuperficie ed è possibile attraversarla in entrambe le direzioni. A destra: ipersuperficie di tipo luce, il cono luce è accasciato sull'ipersuperficie ed è possibile attraversarla in una sola direzione o muovercisi sopra.

Consideriamo, ora, la metrica di Schwarzschild; nello specifico la singolarità di coordinate discussa precedentemente ($r = 2m$) e cerchiamo di capire che tipo di ipersuperficie descrive. La generica ipersuperficie nella geometria di Schwarzschild è data da (ricordando che abbiamo descritto lo spazio con sfere concentriche)

$$f(x^\mu) = r - cost = 0;$$

la norma del suo vettore normale è data da

$$n_\alpha n^\alpha = g^{\alpha\beta} n_\alpha n_\beta = g^{\alpha\beta} f(x^\mu)_{,\alpha} f(x^\mu)_{,\beta} = g^{rr} f(x^\mu)_{,r} f(x^\mu)_{,r} = g^{rr} = \left(1 - \frac{2m}{r}\right), \quad (26)$$

in cui nel terzo passaggio si è notato che l'ipersuperficie dipende solo dalla coordinata radiale e che $f(x^\mu)_{,r} = 1$, mentre nell'ultimo passaggio si è calcolata la metrica inversa che per una metrica diagonale è semplicemente l'inverso dei termini diagonali. Andando a valutare la (26) per valori di r maggiori, minori ed uguali a $2m$ si ottiene

- $r > 2m \Rightarrow n_\alpha n^\alpha > 0 \Rightarrow$ superficie di tipo tempo, è possibile attraversarla in entrambe le direzioni sia per valori di r crescenti sia per valori di r decrescenti. In sostanza è possibile allontanarsi ed avvicinarsi all'oggetto centrale;
- $r = 2m \Rightarrow n_\alpha n^\alpha = 0 \Rightarrow$ superficie di tipo luce, è possibile attraversarla solo in una direzione o muovercisi sopra;
- $r < 2m \Rightarrow n_\alpha n^\alpha < 0 \Rightarrow$ superficie di tipo spazio, è possibile attraversarla solo in una direzione e una volta attraversata non è possibile più tornare indietro. In sostanza superata la soglia $r = 2m$ non si può fare altro che continuare ad avvicinarsi all'oggetto centrale fino ad arrivare alla singolarità di curvatura posta in $r = 0$.

La discussione appena fatta ci porta a dire che l'ipersuperficie $r = 2m$ è una zona di transizione da ipersuperfici che possono essere attraversate da entrambe le direzioni a ipersuperfici che possono essere attraversate solo in una

direzione; questa zona è detta "orizzonte degli eventi". Il fatto che una volta superata l'ipersuperficie $r = 2m$ si possa solo proseguire verso il corpo centrale senza più tornare indietro nasconde un fatto importante: se tutto può solo andare verso il centro nulla ci dà informazioni su cosa ci sia oltre l'ipersuperficie $r = 2m$ (ad esempio non è possibile guardarci dentro perchè le particelle di luce sono costrette, anch'esse, a muoversi necessariamente verso il centro) per cui la singolarità di curvatura predetta dalla relatività generale, e che inizialmente potrebbe far crollare tutto il castello, è nascosta in una regione nella quale una volta entrati nulla può informarci su cosa ci sia al suo interno, è forse anche inutile chiedersi cosa voglia dire questa singolarità dato che non possiamo in alcun modo saperlo.

La metrica di Schwarzschild descrive quindi lo spazio-tempo al di fuori di un oggetto che possiede un orizzonte degli eventi oltre il quale nulla può più uscire; fisicamente corrisponde ad un corpo che genera un tale campo gravitazionale che quando ci si avvicina oltre la distanza $r = 2m = \frac{2GM}{c^2}$ (in cui M è la massa dell'oggetto centrale) la sua gravità impedisce, a qualunque cosa, di poter tornare indietro. Un tale oggetto è chiamato buco nero di Schwarzschild ed è rappresentato nella figura sottostante

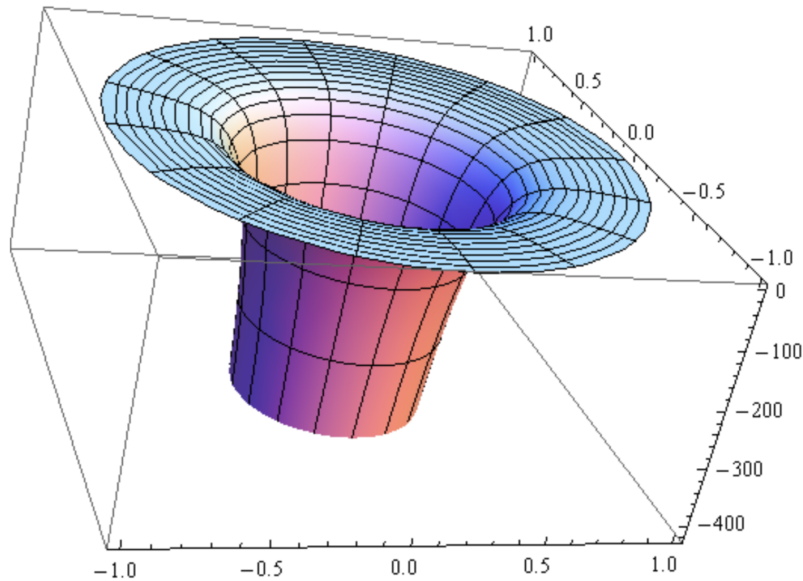


Figura 5: Il grafico rappresenta lo scalare di Kretschmann $K = \frac{48m^2}{r^6}$ e quindi una rappresentazione del buco nero di Schwarzschild

Sempre parlando della singolarità di coordinate in $r = 2m$, è possibile estendere la soluzione di Schwarzschild anche nella regione $r < 2m$; questa estensione, che discuteremo solo brevemente, prende il nome di estensione di Kruskal. Come già detto una singolarità di coordinate è dovuta ad una scelta non ottima delle coordinate e una specifica scelta delle coordinate può rimuovere la singolarità. La metrica di Schwarzschild descrive lo spazio tempo nella regione $r > 2m$ e non può descriverlo per $r < 2m$, per cui non è in grado di seguire una geodetica che parte nella regione $r > 2m$ e che continua nella regione $r < 2m$; per questo motivo la metrica di Schwarzschild è detta "geodesicamente incompleta" (questa è una definizione generale, se una metrica non è in grado di descrivere le geodetiche in una certa regione di spazio è detta geodesicamente incompleta). Una nuova scelta delle coordinate può estendere la validità della metrica anche nelle regioni non coperte dalla metrica originale (in questo caso le regioni $r < 2m$); se la nuova metrica estesa riesce a descrivere le geodetiche in tutto lo spazio tempo sarà detta "geodesicamente completa". Non esiste una procedura per trovare le coordinate che eliminano la singolarità ma si possono cercare studiando il comportamento delle geodetiche nulle (quelle percorse dalla luce). L'idea dell'estensione di Kruskal è, come detto, di estendere la metrica di Schwarzschild oltre l'orizzonte degli eventi e lo fa con un cambio delle coordinate radiale e temporale (le nuove coordinate sono dette coordinate "tortoise"); questa estensione, come mostrato in figura 6, porta all'ipotesi dell'esistenza dei "buchi bianchi" che in opposizione ai buchi neri sarebbero corpi da cui le particelle emergono dalla singolarità gravitazionale centrale e potendo attraversare l'orizzonte degli eventi solo in una direzione escono da questo e proseguono verso l'infinito (verso distanze dal corpo centrale poste a $r > 2m$).

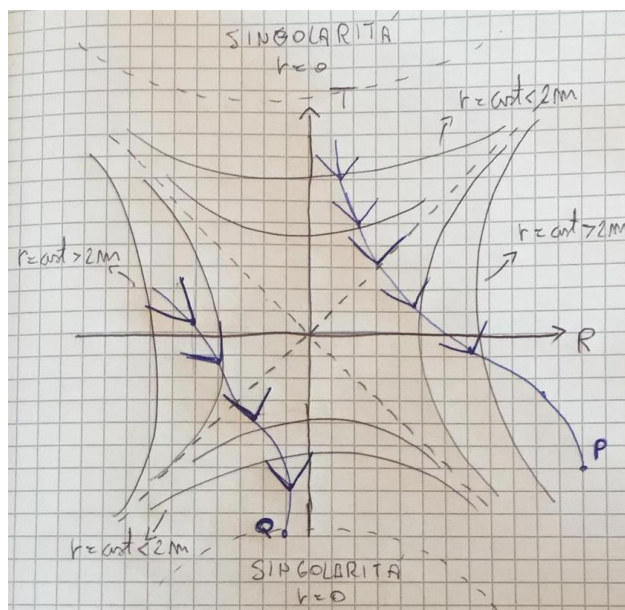


Figura 6: Spazio-tempo bidimensionale dell'estensione di Kruskal; sugli assi abbiamo la nuova coordinata temporale (indicata con T) e la nuova coordinata radiale (indicata con R). Un corpo posto nel punto P segue, ad esempio, la geodetica tracciata in blu. Avvicinandosi al corpo che genera il campo gravitazionale attraversa l'orizzonte degli eventi (la bisettrice tratteggiata) e finisce, inesorabilmente, inghiottito dalla singolarità; abbiamo a che fare con un buco nero. Allo stesso modo un corpo posto in Q segue, ad esempio, la geodetica tracciata in blu e finisce per arrivare nella regione di spazio-tempo con $r > 2m$. In questo caso l'oggetto è partito dalla singolarità posta in basso della figura, emerge attraversando l'orizzonte degli eventi e prosegue verso regioni all'infinito: questo è il caso del buco bianco.

Speculativamente parlando, questi due oggetti potrebbero essere connessi; il buco nero inghiotte in una regione dell'universo e il buco bianco espelle in un'altra regione.

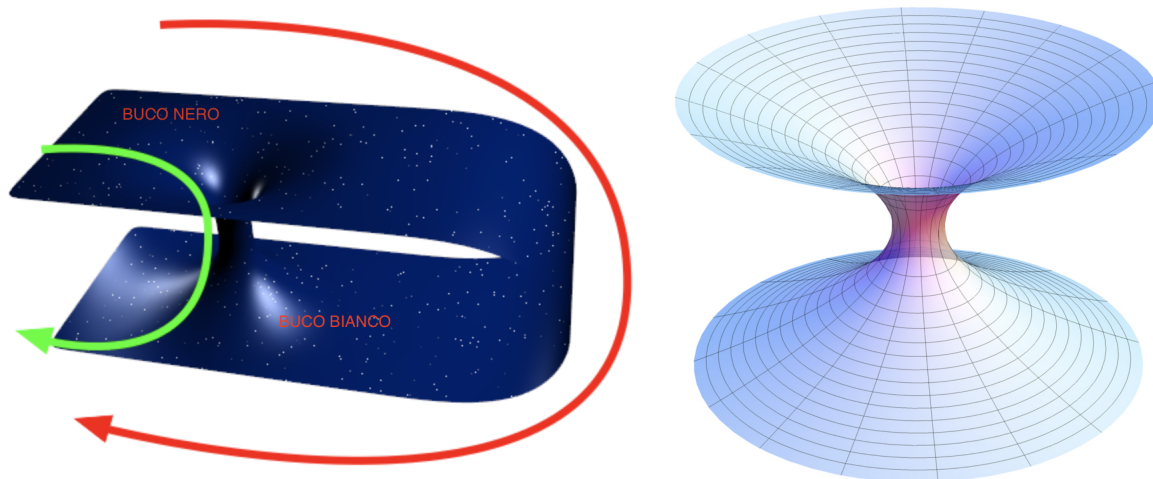


Figura 7: Rappresentazioni della possibile connessione tra buchi neri e buchi bianchi. A sinistra: un oggetto che venisse inghiottito dal buco nero e riemergesse dal buco bianco viaggierebbe tra di essi più velocemente di quanto impiegherebbe la luce a percorrere la distanza attraverso lo spazio normale; questo tipo di struttura topologica è detta "ponte di Einstein-Rosen" o "wormhole". A destra: Ponte di Einstein-Rosen nella metrica di Schwarzschild, nel 1962 John A. Wheeler e Robert W. Fuller pubblicarono un saggio mostrando che questo tipo di wormhole è instabile, e che si chiuderebbe istantaneamente non appena formato, impedendo anche alla luce di attraversarlo.

Come detto la metrica di Schwarzschild descrive oggetti come i buchi neri. Nel caso del buco nero di Schwarzschild parliamo di un buco nero scarico non rotante, tuttavia esistono anche buchi neri carichi e/o rotanti che sono descritti da altre metriche. Riportiamo i grafici dello scalare di Kretschmann (senza riportare le funzioni stesse) nei casi di altre tipologie di buchi neri.

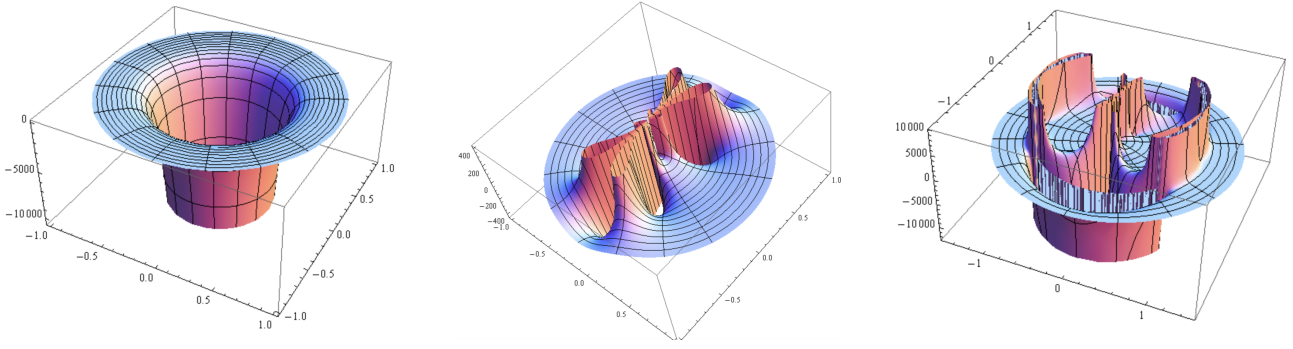


Figura 8: Grafici dello scalare di Kretschmann nel caso di buchi neri diversi dal buco nero di Schwarzschild (buco nero non rotante scarico). A sinistra: buco nero di Reissner-Nordstrom, è un buco nero non rotante ma con carica elettrica la cui metrica è ancora diagonale. Al centro: buco nero di Kerr, si tratta di un buco nero rotante ma scarico la cui metrica non è diagonale. A destra: buco nero di Kerr-Newmann; è il caso più generale in cui il buco nero è rotante e carico, la metrica non è diagonale.

19 Derivare e discutere il redshift gravitazionale delle linee spettrali.

Il redshift gravitazionale è uno dei grandi trionfi della relatività generale ed è sostanzialmente un effetto Doppler unidirezionale dovuto alla metrica e quindi al campo gravitazionale. Come in relatività ristretta anche in relatività generale definiamo il tempo proprio come il tempo nel sistema di riferimento del corpo a cui si riferisce, ossia

$$d\tau := \frac{1}{c} \sqrt{ds^2} = \frac{1}{c} \sqrt{-g_{\mu\nu}(x^\alpha) dx^\mu dx^\nu} \Rightarrow \quad (27)$$

nel caso di metrica di Minkowski la (27) ci dà

$$d\tau = \frac{1}{c} \sqrt{c^2 dt^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2} = \sqrt{dt^2 - \frac{\sum_i (dx^i)^2}{c^2}} = dt \sqrt{1 - \frac{\sum_i (dx^i)^2}{c^2 dt^2}} = dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{dt}{\gamma};$$

e ritroviamo il fattore di Lorentz e la corretta definizione della dilatazione dei tempi. La (27), quindi, già ci dice una cosa importante, a seconda della campo gravitazionale (a seconda della metrica) il tempo scorre diversamente.

Immaginiamo di avere una sorgente, S , che emette un segnale elettromagnetico e che questo segnale venga osservato da un osservatore O e assumiamo un campo gravitazionale (e quindi un tensore metrico) stazionario. Data la stazionarietà della metrica, se sorgente ed osservatore sono a riposo, il tempo che impiega la luce ad andare da S a O è lo stesso per tutti i segnali; come conseguenza se due creste vengono emesse con un intervallo di tempo Δt_S verranno ricevute dall'osservatore con un intervallo di tempo $\Delta t_O \equiv \Delta t_S$. Calcoliamo il periodo dell'onda emessa e dell'onda ricevuta: il periodo dell'onda emessa è il tempo, misurato nel sistema di riferimento della sorgente, che intercorre tra le emissioni di due creste (è quindi l'intervallo di tempo proprio della sorgente) mentre il periodo dell'onda ricevuta è il tempo, misurato nel sistema di riferimento dell'osservatore, che intercorre tra la ricezione di due creste (è quindi l'intervallo di tempo proprio dell'osservatore). In formule, con riferimento alla (27) e ricordando che S e O sono a riposo (ossia $v_S = v_O = 0$),

$$\Delta\tau_S = \sqrt{-g_{00}(x_S^\mu)} \Delta t_S;$$

$$\Delta\tau_O = \sqrt{-g_{00}(x_O^\mu)} \Delta t_O;$$

le frequenze di emissione e ricezione sono semplicemente gli inversi delle relazioni appena trovate

$$\mathcal{F}_S = \frac{1}{\Delta\tau_S} = \frac{1}{\sqrt{-g_{00}(x_S^\mu)} \Delta t_S};$$

$$\mathcal{F}_O = \frac{1}{\Delta\tau_O} = \frac{1}{\sqrt{-g_{00}(x_O^\mu)} \Delta t_O}.$$

Ricordando che i tempi di emissione e ricezione sono uguali otteniamo

$$\frac{\lambda_S}{\lambda_O} = \frac{\mathcal{F}_O}{\mathcal{F}_S} = \frac{1}{\sqrt{-g_{00}(x_O^\mu)} \Delta t_O} \sqrt{-g_{00}(x_S^\mu)} \Delta t_S = \frac{\sqrt{-g_{00}(x_S^\mu)}}{\sqrt{-g_{00}(x_O^\mu)}} \Rightarrow \frac{\lambda_S - \lambda_O}{\lambda_O} = \frac{\mathcal{F}_O - \mathcal{F}_S}{\mathcal{F}_S} = \frac{\sqrt{-g_{00}(x_S^\mu)}}{\sqrt{-g_{00}(x_O^\mu)}} - 1. \quad (28)$$

Dalla (28) vediamo che in generale la lunghezza d'onda e frequenza del segnale emesso e del segnale ricevuto sono diverse, poichè la metrica calcolata nel punto della sorgente e dell'osservatore è, in generale, diversa.

Vediamo l'applicazione della (28) in due regimi:

- Campo debole: in questo caso sappiamo che la componente g_{00} si riduce a $-(1 + \frac{2\Phi}{c^2})$ per cui, al primo ordine nel potenziale gravitazionale si ha

$$\begin{aligned} \frac{\lambda_S - \lambda_O}{\lambda_O} &= \frac{\mathcal{F}_O - \mathcal{F}_S}{\mathcal{F}_S} = \sqrt{\frac{(1 + \frac{2\Phi_S}{c^2})}{(1 + \frac{2\Phi_O}{c^2})}} - 1 \approx \sqrt{\left(1 + \frac{2\Phi_S}{c^2}\right)\left(1 - \frac{2\Phi_O}{c^2}\right)} - 1 \approx \sqrt{1 - \frac{2\Phi_O}{c^2} + \frac{2\Phi_S}{c^2}} - 1 = \\ &= \sqrt{1 + \frac{2}{c^2}(\Phi_S - \Phi_O)} - 1 \approx \frac{1}{c^2}(\Phi_S - \Phi_O); \end{aligned}$$

in cui nel terzo passaggio abbiamo utilizzato lo sviluppo di Taylor al primo ordine della funzione $\frac{1}{1+x} \approx 1 - x$, nel quarto passaggio abbiamo trascurato il termine prodotto tra i due potenziali e nell'ultimo passaggio abbiamo usato lo sviluppo di Taylor al primo ordine della funzione $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2}$. L'espressione trovata ci dice che un segnale luminoso nel viaggiare da un luogo con potenziale gravitazionale Φ_S ad uno con potenziale Φ_O cambia di frequenza; nello specifico se $\Phi_O < \Phi_S$ allora $\frac{\mathcal{F}_O - \mathcal{F}_S}{\mathcal{F}_S} > 0$ e quindi $\mathcal{F}_O > \mathcal{F}_S$ e parliamo di "blueshift gravitazionale" mentre nel caso in cui $\Phi_O > \Phi_S$ allora $\frac{\mathcal{F}_O - \mathcal{F}_S}{\mathcal{F}_S} < 0$ e quindi $\mathcal{F}_O < \mathcal{F}_S$ e parliamo di "redshift gravitazionale". Nel caso del nostro Sole abbiamo $\Phi_O > \Phi_S$ (ricordare che il potenziale gravitazionale ha un segno meno davanti) e siamo, quindi, nel caso del redshift, nello specifico $\frac{\mathcal{F}_O - \mathcal{F}_S}{\mathcal{F}_S} \approx -0,2 \cdot 10^{-5}$;

- Campo forte: questo regime è tipico in presenza di stelle di neutroni o buchi neri e la metrica adatta alla descrizione della regione esterna di questi oggetti è la metrica Schwarzschild, in cui $g_{00} = -(1 - \frac{2m}{r})$. Dalla (28) otteniamo

$$\begin{aligned} \frac{\lambda_S - \lambda_O}{\lambda_O} &= \frac{\mathcal{F}_O - \mathcal{F}_S}{\mathcal{F}_S} = \sqrt{\frac{1 - \frac{2m}{r_S}}{1 - \frac{2m}{r_O}}} - 1 \approx \sqrt{\left(1 - \frac{2m}{r_S}\right)\left(1 + \frac{2m}{r_O}\right)} - 1 \approx \sqrt{1 + \frac{2m}{r_O} - \frac{2m}{r_S}} - 1 = \\ &= \sqrt{1 + 2m\left(\frac{1}{r_O} - \frac{1}{r_S}\right)} - 1 \approx m\left(\frac{1}{r_O} - \frac{1}{r_S}\right); \end{aligned}$$

in cui nel terzo passaggio abbiamo utilizzato lo sviluppo di Taylor al primo ordine della funzione $\frac{1}{1-x} \approx 1 + x$, nel quarto passaggio abbiamo trascurato il termine prodotto e nell'ultimo passaggio abbiamo usato lo sviluppo di Taylor al primo ordine della funzione $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2}$. Anche in questo caso il segnale luminoso cambia di frequenza. Nel caso di una stella di neutroni media abbiamo $\frac{\mathcal{F}_O - \mathcal{F}_S}{\mathcal{F}_S} \approx -0,22$, molto più marcato che nel caso di campo debole. Inoltre se consideriamo la sorgente posta in un orizzonte degli eventi, dalla formula analitica otteniamo

$$\lim_{r_S \rightarrow 2m} \frac{\mathcal{F}_O - \mathcal{F}_S}{\mathcal{F}_S} = \lim_{r_S \rightarrow 2m} \sqrt{\frac{1 - \frac{2m}{r_S}}{1 - \frac{2m}{r_O}}} - 1 \rightarrow -1 \Rightarrow \mathcal{F}_O \rightarrow 0;$$

poichè la frequenza del segnale ricevuto tende a zero all'avvicinarsi dalla sorgente all'orizzonte degli eventi l'informazione trasportata dal segnale viene persa per sempre.

Per capire in che regime ci si trova si fa riferimento alla gravità superficiale (G_S) dell'oggetto sorgente del campo gravitazionale che ci dice quanto gli effetti della relatività generale sia consistenti. E' data da

$$G_S = \frac{GM}{Rc^2},$$

in cui M e R sono la massa ed il raggio del corpo sorgente del campo. Per il sole si ha $G_{Ssole} \approx 0,21 \cdot 10^{-5}$ mentre per una stella di neutroni media $G_{Ssdn\ media} \approx 0,21$; in entrambi i casi è, in modulo, pari alla variazione della frequenza del segnale emesso. La gravità superficiale di un corpo ci fornisce una stima della variazione della frequenza del segnale. Ultima considerazione: il tutto è stato ricavato solo presupponendo che l'interazione gravitazionale sia descritta dalla metrica, ossia abbiamo utilizzato solo il principio di equivalenza.

20 Data la metrica di Schwarzschild $ds^2 = -\left(1 - \frac{2m}{r}\right)dt^2 + \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{2m}{r}\right)} + r^2d\theta^2 + r^2\sin^2(\theta)d\phi^2$ derivare le equazioni delle geodetiche per particelle di massa nulla, e discutere i vari tipi di orbita.

Per derivare le equazioni delle geodetiche ci rifacciamo ai principi variazionali; le equazioni di Eulero-Lagrange nel caso della relatività generale si scrivono come

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\alpha} - \frac{d}{dq} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{dx^\alpha}{dq}\right)} = 0, \quad (29)$$

in cui \mathcal{L} è la lagrangiana e q è il parametro affine con cui è parametrizzata la generica curva. Nel caso di particella libera, in cui libera è inteso come non soggetta a forze che non siano quella gravitazionale, si scrive come $\mathcal{L} = \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{dq}\frac{dx^\nu}{dq}$; inserendo questa lagrangiana nelle (29) si ottiene

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu,\alpha}\frac{dx^\mu}{dq}\frac{dx^\nu}{dq} - \frac{d}{dq}\left(2g_{\alpha\mu}\frac{dx^\mu}{dq}\right) &= g_{\mu\nu,\alpha}\frac{dx^\mu}{dq}\frac{dx^\nu}{dq} - 2g_{\alpha\mu,\beta}\frac{dx^\beta}{dq}\frac{dx^\mu}{dq} - 2g_{\alpha\mu}\frac{d^2x^\mu}{dq^2} = \\ &= g_{\mu\nu,\alpha}\frac{dx^\mu}{dq}\frac{dx^\nu}{dq} - g_{\alpha\mu,\nu}\frac{dx^\nu}{dq}\frac{dx^\mu}{dq} - g_{\alpha\nu,\mu}\frac{dx^\mu}{dq}\frac{dx^\nu}{dq} - 2g_{\alpha\mu}\frac{d^2x^\mu}{dq^2} \Rightarrow \\ \Rightarrow -g^{\alpha\gamma}\left(g_{\mu\nu,\alpha}\frac{dx^\mu}{dq}\frac{dx^\nu}{dq} - g_{\alpha\mu,\nu}\frac{dx^\nu}{dq}\frac{dx^\mu}{dq} - g_{\alpha\nu,\mu}\frac{dx^\mu}{dq}\frac{dx^\nu}{dq} - 2g_{\alpha\mu}\frac{d^2x^\mu}{dq^2}\right) &= \\ = 2\delta_\mu^\gamma\frac{d^2x^\mu}{dq^2} + g^{\alpha\gamma}\left(-g_{\mu\nu,\alpha}\frac{dx^\mu}{dq}\frac{dx^\nu}{dq} + g_{\alpha\mu,\nu}\frac{dx^\nu}{dq}\frac{dx^\mu}{dq} + g_{\alpha\nu,\mu}\frac{dx^\mu}{dq}\frac{dx^\nu}{dq}\right) &= \\ = \frac{d^2x^\gamma}{dq^2} + \frac{1}{2}g^{\alpha\gamma}\left(-g_{\mu\nu,\alpha} + g_{\alpha\mu,\nu} + g_{\alpha\nu,\mu}\right)\frac{dx^\mu}{dq}\frac{dx^\nu}{dq} = \frac{d^2x^\gamma}{dq^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\gamma\frac{dx^\mu}{dq}\frac{dx^\nu}{dq} = 0, \end{aligned}$$

che è esattamente l'equazione delle geodetiche. Questo significa che data una metrica possiamo trovare le equazioni delle geodetiche semplicemente usando le equazioni (29).

Determiniamo, a questo punto, le equazioni delle geodetiche per la metrica di Schwarzschild; la lagrangiana si scrive (con il punto indichiamo la derivata rispetto al parametro affine)

$$\mathcal{L} = -\left(1 - \frac{2m}{r}\right)\dot{t}^2 + \frac{\dot{r}^2}{\left(1 - \frac{2m}{r}\right)} + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2(\theta)\dot{\phi}^2, \quad (30)$$

le equazioni per \dot{t} , $\dot{\phi}$ e $\dot{\theta}$ saranno determinate mediante le (29) mentre l'equazione per \dot{r} sarà derivata dalla condizione di quadrivelocità (intesa come derivata delle coordinate rispetto al parametro affine) di tipo luce, $g_{\mu\nu}U^\mu U^\nu = 0$:

- Equazione per \dot{t} :

$$\frac{d}{dq}\left[2\left(1 - \frac{2m}{r}\right)\dot{t}\right] = 0 \Rightarrow \dot{t} = \frac{cost}{\left(1 - \frac{2m}{r}\right)}.$$

Poichè la metrica di Schwarzschild possiede un campo di Killing di tipo tempo sappiamo che è possibile associarvi la legge di conservazione $g_{00}U^0 = cost$ in cui la costante è l'energia della particella. In questo caso, nella metrica di Schwarzschild, la legge di conservazione si scrive $\left(1 - \frac{2m}{r}\right)\dot{t} = cost$; l'equazione di conservazione e l'equazione derivante dalla (29) coincidono per cui la costante deve essere la stessa, ossia l'energia della particella. In definitiva

$$\dot{t} = \frac{E}{\left(1 - \frac{2m}{r}\right)}; \quad (31)$$

- Equazione per $\dot{\phi}$:

$$\frac{d}{dq}\left[2r^2\sin^2(\theta)\dot{\phi}\right] = 0 \Rightarrow \dot{\phi} = \frac{cost}{r^2\sin^2(\theta)}.$$

Anche in questo caso, sappiamo (data la simmetria sferica) che la metrica possiede un campo di Killing di tipo spazio che possiamo far coincidere con il versore \vec{e}_ϕ in modo da poter scrivere la legge di conservazione $g_{33}U^3 = cost$. Nella metrica di Schwarzschild la legge di conservazione si traduce in $r^2\sin^2(\theta)\dot{\phi} = cost$ in cui possiamo riconoscere la costante come il momento angolare, L , della particella in un'orbita che forma un angolo θ con l'asse azimutale; inoltre, poichè la legge di conservazione e l'equazione derivante dalla (29) coincidono, le due costanti devono essere uguali. Alla fine abbiamo

$$\dot{\phi} = \frac{L}{r^2\sin^2(\theta)}; \quad (32)$$

- Equazione per $\dot{\theta}$:

$$2r^2\sin(\theta)\cos(\theta)\dot{\phi}^2 = \frac{d}{dq}(2r^2\dot{\theta}) \Rightarrow 2r^2\sin(\theta)\cos(\theta)\dot{\phi}^2 = 4r\dot{r}\dot{\theta} + 2r^2\ddot{\theta} \Rightarrow \ddot{\theta} = \sin(\theta)\cos(\theta)\dot{\phi}^2 - \frac{2}{r}\dot{r}\dot{\theta}.$$

L'equazione non è banale come le precedenti e ci servono delle condizioni "iniziali"; data la simmetria sferica possiamo imporre che per un certo valore del parametro affine, $q = q_0$ si abbia $\theta(q_0) = \frac{\pi}{2}$ e $\dot{\theta}(q_0) = 0$. Abbiamo quindi un problema di Cauchy e supposta la lipschitzianità necessaria il problema ammette un'unica soluzione. Poichè ponendo $\theta(q) = \frac{\pi}{2}$ soddisfiamo sia l'equazione che le condizioni poste possiamo dire che essa è la sola soluzione; questo implica che il moto sia planare. L'equazione per θ è semplicemente

$$\theta = \frac{\pi}{2}; \quad (33)$$

- Equazione per \dot{r} : usiamo, come accennato, la relazione $g_{\mu\nu}U^\mu U^\nu = 0$ e sostituiamoci le relazioni (31), (32) e (33),

$$\begin{aligned}
& -\left(1 - \frac{2m}{r}\right)\dot{t}^2 + \frac{\dot{r}^2}{\left(1 - \frac{2m}{r}\right)} + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2(\theta)\dot{\phi}^2 = 0 \Rightarrow \\
& \Rightarrow -\left(1 - \frac{2m}{r}\right)\frac{E^2}{\left(1 - \frac{2m}{r}\right)^2} + \frac{\dot{r}^2}{\left(1 - \frac{2m}{r}\right)} + r^2\frac{L^2}{r^4} = 0 \Rightarrow \\
& \qquad -\frac{E^2}{\left(1 - \frac{2m}{r}\right)} + \frac{\dot{r}^2}{\left(1 - \frac{2m}{r}\right)} + \frac{L^2}{r^2} = 0 \Rightarrow \\
& \qquad \qquad \Rightarrow \dot{r}^2 + \left(1 - \frac{2m}{r}\right)\frac{L^2}{r^2} = E^2.
\end{aligned} \tag{34}$$

Ora che abbiamo le equazioni delle geodetiche possiamo discutere i vari tipi di orbita di una particella non massiva. Poniamo l'equazione (34) nella forma

$$\dot{r}^2 = E^2 - V^2(r) \tag{35}$$

in cui $V^2(r) = \frac{L^2}{r^2}\left(1 - \frac{2m}{r}\right)$. Notiamo che la funzione $V^2(r)$ tende a zero quando $r \rightarrow \infty$ e a $-\infty$ quando $r \rightarrow 0$; inoltre la funzione possiede un massimo in $r_M = 3m$ in cui vale $V_M^2 = V^2(r_M) = \frac{L^2}{27m^2}$. Abbiamo 3 orbite possibili:

- $E^2 > V_M^2$: Dalla (35) abbiamo che $\dot{r}^2 > 0$ sempre e la particella spiraleggia e viene attratta (nella figura 9 cade nella buca) contro il corpo centrale;
- $E^2 = V_M^2$: Dalla (35) vediamo che in questo caso $\dot{r}^2 = 0$; se la particella si trova ad essere in $r = r_M$, essendo questo un punto di massimo per la funzione $V^2(r)$, l'accelerazione radiale è identicamente nulla. Quanto detto comporta che l'orbita con $r = r_M$ è un'orbita chiusa di equilibrio (ovviamente instabile, appena r diminuisce la particella finisce inghiottita mentre se r aumenta la particella è libera di fuggire);
- $E^2 = V^2(r^*) < V_M^2$: Dalla (35), \dot{r}^2 è positivo fintanto che $V^2(r) < V^2(r^*)$ e si annulla quando $V^2(r) = V^2(r^*)$; poichè se la particella andasse in una regione in cui $V^2(r) > V^2(r^*)$ la velocità radiale diventerebbe immaginaria (il che non ha alcun senso) allora il punto $r = r^*$ deve essere un punto di inversione del moto (nella figura 9 colpisce la barriera). Questo tipo di orbita può avvenire solo se $E^2 = V^2(r^*) < V_M^2 = \frac{L^2}{27m^2}$ ed avrà a che fare con il fenomeno della deflessione della luce.

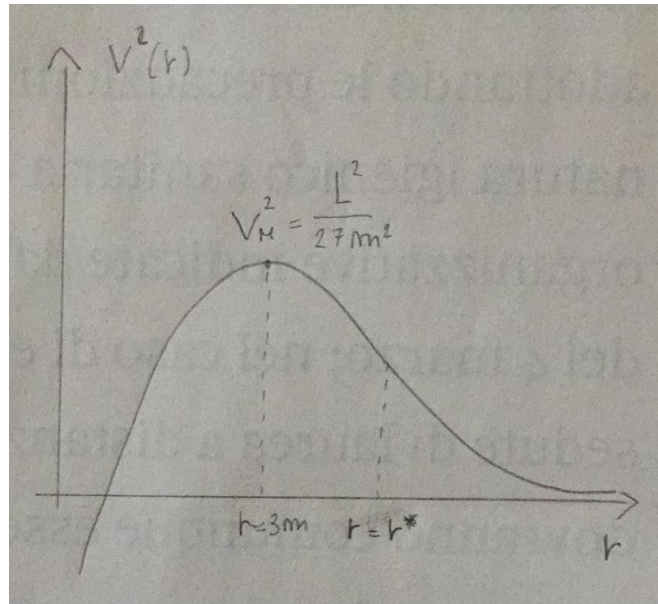


Figura 9: Grafico della funzione $V^2(r)$ da cui possiamo capire i tipi di orbita per una particella non massiva; abbiamo solo un massimo. Se $E^2 > V_M^2$ la particella finisce per essere inghiottita, se $E^2 = V_M^2$ abbiamo un'orbita chiusa circolare instabile mentre se $E^2 = V^2(r^*) < V_M^2$ la particella viene deflessa nel punto di coordinata $r = r^*$.

21 Data la metrica di Schwarzschild $ds^2 = -\left(1 - \frac{2m}{r}\right)dt^2 + \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{2m}{r}\right)} + r^2d\theta^2 + r^2\sin^2(\theta)d\phi^2$ derivare le equazioni delle geodetiche per particelle massive e discutere i vari tipi di orbita.

La derivazione delle equazioni delle geodetiche analoghe alla (31), (32) e (33) è identica al caso precedente con l'unica differenza che le costanti E ed L rappresentano, ora, l'energia ed il momento angolare per unità di massa della particella massiva. Per l'equazione analoga alla (34) dobbiamo invece imporre che $g_{\mu\nu}U^\mu U^\nu = -1$ per cui

$$\begin{aligned} -\left(1 - \frac{2m}{r}\right)\dot{t}^2 + \frac{\dot{r}^2}{\left(1 - \frac{2m}{r}\right)} + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2(\theta)\dot{\phi}^2 &= -1 \Rightarrow \\ \Rightarrow -\left(1 - \frac{2m}{r}\right)\frac{E^2}{\left(1 - \frac{2m}{r}\right)^2} + \frac{\dot{r}^2}{\left(1 - \frac{2m}{r}\right)} + r^2\frac{L^2}{r^4} &= -1 \Rightarrow \\ -\frac{E^2}{\left(1 - \frac{2m}{r}\right)} + \frac{\dot{r}^2}{\left(1 - \frac{2m}{r}\right)} + \frac{L^2}{r^2} &= -1 \Rightarrow \\ \Rightarrow \dot{r}^2 + \left(1 - \frac{2m}{r}\right)\left(1 + \frac{L^2}{r^2}\right) &= E^2. \end{aligned}$$

L'intero set di equazioni delle geodetiche nel caso si particella massiva di scrive quindi:

$$\begin{aligned} \dot{r}^2 + \left(1 - \frac{2m}{r}\right)\left(1 + \frac{L^2}{r^2}\right) &= E^2; \\ \theta &= \frac{\pi}{2}; \\ \dot{\phi} &= \frac{L}{r^2\sin^2(\theta)}; \\ \dot{t} &= \frac{E}{\left(1 - \frac{2m}{r}\right)}. \end{aligned} \tag{36}$$

Come nel caso precedente poniamo l'equazione per \dot{r} nella forma

$$\dot{r}^2 = E^2 - V^2(r) \tag{37}$$

in cui $V^2(r) = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)\left(1 + \frac{L^2}{r^2}\right)$. In questo caso la funzione $V^2(r)$ tende ad 1 quando $r \rightarrow \infty$ e a $-\infty$ quando $r \rightarrow 0$; inoltre abbiamo due punti stazionari in corrispondenza di

$$r_{\pm} = \frac{L^2 \pm \sqrt{L^4 - 12m^2L^2}}{2m} = \frac{L^2 \pm L^2\sqrt{1 - \frac{12m^2}{L^2}}}{2m} = \frac{L^2}{2m} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{12m^2}{L^2}}\right), \tag{38}$$

in cui $V^2(r_-) = V_M^2$ e $V^2(r_+) = V_m^2$. Come si vede dall'equazione (38) dobbiamo classificare le orbite in funzione del valore del momento angolare della particella in quanto il potenziale assume forme diverse a seconda che abbia 0, 1 o 2 punti stazionari:

- $L^2 < 12m^2$: le radici (38) sono immaginarie, non ci sono punti stazionari. Una particella proveniente dall'infinito diretta verso il corpo sorgente cadrà attratta dal corpo centrale (nella figura 10 cade nella buca);
- $L^2 = 12m^2$: in questo caso le radici coincidono e si ha un solo punto stazionario in corrispondenza di $r_-^* = r_+^* = \frac{L^2}{2m} = 6m$; in questo punto l'orbita è circolare e stabile.
- $L^2 > 12m^2$: ci sono 2 radici distinte corrispondenti ad un massimo, $V^2(r_-) = V_M^2$, ed ad un minimo, $V^2(r_+) = V_m^2$, di $V^2(r)$; questa casistica è divisa in due sottocasistiche:
 - $L^2 > 16m^2$: il massimo del potenziale, V_M^2 , è maggiore del valore del potenziale all'infinito; le orbite sono:
 - * $E^2 > V_M^2$: dall'equazione (38) la particella ha sempre $\dot{r} > 0$ e si avvicina fino ad essere inghiottita dal corpo centrale;
 - * $E^2 = V_M^2$: la particella che si trova in $r = r_-$ ha, dalla (37), velocità radiale nulla ed inoltre essendo V_M^2 un punto stazionario ha anche accelerazione radiale nulla; si troverà quindi a percorrere un'orbita chiusa instabile infatti se si dovesse avvicinare cadrebbe inghiottita, mentre se si dovesse allontanare potrebbe fuggirebbe all'infinito.

- * $E^2 = V^2(r^*) < V_M^2$ e $E^2 = V^2(r^*) > V^2(\infty)$: la particella si avvicina fino a quando raggiunge un punto in cui $V^2(r) = V^2(r^*)$ in cui, dalla (37), $\dot{r} = 0$; siccome per valori di $V^2(r) > V^2(r^*)$ la velocità radiale sarebbe immaginaria, il punto $r = r^*$ è un punto di inversione nel quale la particella viene deflessa;
- * $E^2 \geq V_m^2$ e $E^2 < V^2(\infty)$: la particella si muove su di un'orbita ellittica stabile che precede, mentre se vale l'uguaglianza l'orbita è circolare (la particella si trova nella buca della figura 10).
- $L^2 < 16m^2$: il massimo del potenziale, V_M^2 , è minore del valore del potenziale all'infinito; le orbite sono:
 - * $E^2 > V_M^2$: dall' equazione (38) la particella ha sempre $\dot{r} > 0$ e si avvicina fino ad essere inghiottita dal corpo centrale;
 - * $E^2 = V_M^2$: la particella che si trova in $r = r_-$ ha, dalla (37), velocità radiale nulla ed inoltre essendo V_M^2 un punto stazionario ha anche accelerazione radiale nulla; si troverà quindi a percorrere un'orbita chiusa instabile infatti se si dovesse avvicinare cadrebbe inghiottita, mentre se si dovesse allontanare finirebbe nella buca e quindi su orbite stabili.
 - * $E^2 = V^2(r^*) < V_M^2$ e $E^2 = V^2(r^*) > V^2(\infty)$: la particella si avvicina fino a quando raggiunge un punto in cui $V^2(r) = V^2(r^*)$ in cui, dalla (37), $\dot{r} = 0$; siccome per valori di $V^2(r) > V^2(r^*)$ la velocità radiale sarebbe immaginaria, il punto $r = r^*$ è un punto di inversione nel quale la particella viene deflessa;
 - * $E^2 \geq V_m^2$ e $E^2 < V^2(\infty)$: la particella si muove su di un'orbita ellittica stabile che precede, mentre se vale l'uguaglianza l'orbita è circolare (la particella si trova nella buca della figura 10).

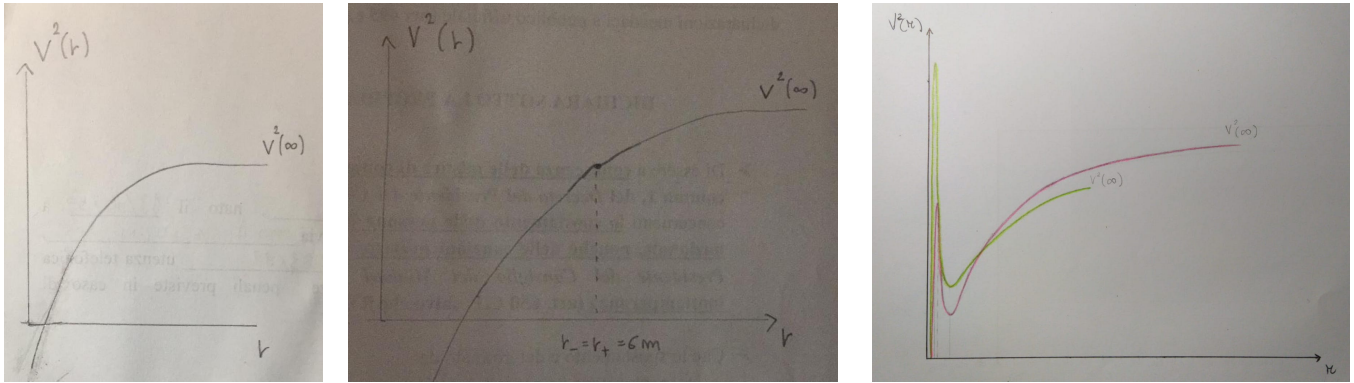


Figura 10: Casi possibili di potenziale per particella massiva, il valore $V^2(\infty)$ è il valore della funzione $V^2(r)$ calcolato all'infinito. A sinistra, caso in cui $L^2 < 12m^2$: nessun punto stazionario. Al centro, caso in cui $L^2 = 12m^2$: un solo punto stazionario in cui le radici (38) coincidono e prendono il valore $r_- = r_+ = 6m$. A destra, caso in cui $L^2 > 12m^2$: due punti stazionari distinti; le due curve si distinguono per il fatto che in una (curva verde in cui si ha $L^2 > 16m^2$) il massimo è maggiore del valore all'infinito mentre nell'altra (curva rossa in cui $L^2 < 16m^2$) il massimo è minore del valore all'infinito. Nel caso della curva verde la particella posta al massimo quando viene perturbata può fuggire all'infinito, nel caso della curva rossa, invece, può finire in un'orbita stabile ellittica.

Possiamo fare altre considerazioni che valgono sempre: poichè dalla (38) vediamo che r_+ è una funzione crescente di L possiamo dire che $r_+^* = 6m$ è il valore minimo di r_+ . Sempre dalla (38) notiamo che quando $L \rightarrow \infty$ si ha

$$r_- = \frac{L^2}{2m} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{12m^2}{L^2}} \right) \rightarrow \frac{L^2}{2m} \left(1 - 1 + \frac{1}{2} \frac{12m^2}{L^2} \right) = 3m$$

quindi deve essere $3m < r_- < r_-^* = 6m$. Dato che r_+ corrisponde ad un minimo di $V^2(r)$, la condizione $r_+ > r_+^* = 6m$ significa che non esistono orbite circolari stabili per valori di r_+ minori di $6m$; allo stesso modo dato che r_- corrisponde ad un massimo di $V^2(r)$, la condizione $3m < r_- < r_-^* = 6m$ ci dice che non esistono orbite circolari instabili per valori di r_- al di fuori del range appena riportato

22 Utilizzando le equazioni delle geodetiche per particelle di massa nulla nella metrica di Schwarzschild $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\dot{t} = \frac{E}{(1 - \frac{2m}{r})}$, $\dot{\phi} = \frac{L}{r^2}$, $\dot{r}^2 = E^2 - \frac{L^2}{r^2} \left(1 - \frac{2m}{r} \right)$ derivare e discutere il fenomeno della deflessione della luce nelle vicinanze di un corpo massivo.

Il fenomeno della deflessione della luce fu il primo test sperimentale della relatività generale. Dopo la prima guerra mondiale l'astrofisico e astronomo Sir Arthur Stanley Eddington partì alla volta di São Tomé e Príncipe, dove il 29

maggio 1919 sarebbe stata visibile un'eclissi totale di Sole. L'idea di Eddington era quella di fotografare le stelle visibili durante l'eclissi e confrontarle con le fotografie delle stesse stelle fatte di notte, quando la massa del sole non avrebbe potuto deviarle i fasci luminosi emessi. Quello che scopri, fu che la relatività di Einstein prediceva correttamente (in maniera quantitativa) il fenomeno.

Definiamo i parametri di interesse ed il sistema di riferimento. Il parametro di impatto, b , è la distanza dal corpo attrattore della direzione di entrata della particella; il sistema è preso in maniera tale che l'angolo ϕ tra l'asse verticale e il raggio vettore sia nullo quando la particella si avvicina dall'infinito al corpo sorgente del campo e sia pari a $\pi + \delta$ quando la particella non massiva viene deflessa (vedere figura 11).

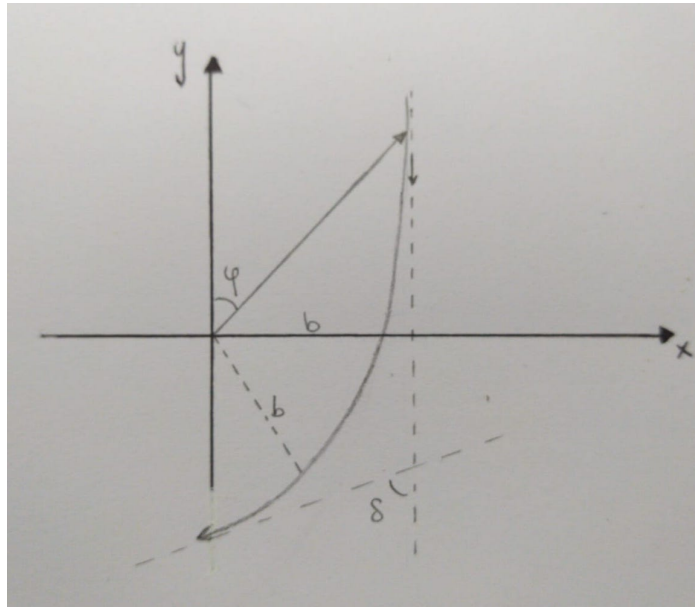


Figura 11: Sistema di riferimento per lo studio della deflessione della luce. L'angolo δ equivale alla deflessione della traiettoria del raggio luminoso, b è il parametro di impatto e ϕ è l'angolo che tende a zero quando la particella si trova all'infinito.

Il parametro di impatto è derivabile prendendo il limite dell'angolo ϕ che tende a zero (o equivalentemente $r \rightarrow \infty$), infatti

$$b = \lim_{\phi \rightarrow 0} r \sin(\phi) \approx r\phi \Rightarrow \phi \approx \frac{b}{r} \Rightarrow \frac{d\phi}{dr} \approx -\frac{b}{r^2};$$

ma combinando la terza e la quarta equazione date dalla domanda possiamo scrivere

$$\frac{d\phi}{dr} \frac{dr}{dq} = \frac{L}{r^2} \Rightarrow \pm \frac{d\phi}{dr} \sqrt{E^2 - \frac{L^2}{r^2} \left(1 - \frac{2m}{r}\right)} = \frac{L}{r^2} \Rightarrow \frac{d\phi}{dr} = \pm \frac{L}{r^2 \sqrt{E^2 - \frac{L^2}{r^2} \left(1 - \frac{2m}{r}\right)}} \approx \pm \frac{L}{r^2 E}.$$

Eguagliando le due equazioni per $\frac{d\phi}{dr}$ possiamo ottenere il parametro di impatto

$$-\frac{b}{r^2} = -\frac{L}{Er^2} \Rightarrow b = \frac{L}{E}, \quad (39)$$

in cui abbiamo preso solo il segno negativo della seconda equazione dato che il parametro di impatto deve essere positivo. Sappiamo che una particella viene deflessa solo se $E^2 \leq \frac{L^2}{27m^2}$ per cui possiamo ottenere un parametro di impatto critico sotto il quale la particella viene catturata dal corpo attrattore,

$$b = \frac{L}{E} \geq \frac{\sqrt{27}mE}{E} = \sqrt{27}m \Rightarrow b_{critico} := \sqrt{27}m,$$

è interessante notare che questo valore è molto più piccolo dei raggi fisici dei corpi celesti tranne che nel caso di buchi neri e stelle di neutroni.

Veniamo, ora, al calcolo dell'angolo di deflessione δ ; definiamo la nuova variabile $u = \frac{1}{r}$ e notiamo che $u(\phi = 0) = 0$ e $u(\phi = \pi + \delta) = 0$ per costruzione (a questi due angoli la particella si trova all'infinito). Possiamo riscrivere l'equazione delle geodetiche per r^2 in termini di questa nuova variabile (servendoci anche l'equazione delle geodetiche per $\dot{\phi}$), infatti

$$\frac{dr}{dq} = \frac{dr}{d\phi} \frac{d\phi}{dq} = \frac{d}{d\phi} \left(\frac{1}{u} \right) \frac{d\phi}{dq} = -\frac{1}{u^2} \frac{du}{d\phi} \frac{d\phi}{dq} = -\frac{1}{u^2} \frac{du}{d\phi} Lu^2 = -L \frac{du}{d\phi},$$

e sostituendo nell'equazione delle geodetiche per \dot{r}^2 otteniamo

$$L^2 \left(\frac{du}{d\phi} \right)^2 = E^2 - L^2 u^2 (1 - 2mu) = E^2 - L^2 u^2 + 2L^2 mu^3 \Rightarrow 2L^2 \left(\frac{du}{d\phi} \right) \left(\frac{d^2u}{d\phi^2} \right) = -2L^2 u \frac{du}{d\phi} + 6mL^2 u^2 \frac{du}{d\phi};$$

in cui abbiamo differenziato rispetto a ϕ . Dividendo l'equazione appena trovata per $2L^2 \frac{du}{d\phi}$ si ottiene l'equazione che determina l'angolo di deflessione

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} = -u + 3mu^2 \Rightarrow \frac{d^2u}{d\phi^2} + u - 3mu^2 = 0; \quad (40)$$

le condizioni iniziali sono $u(\phi = 0) = 0$ e $\frac{du}{d\phi}|_{\phi=0} = \frac{du}{dr} \frac{dr}{d\phi} = \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \right) \frac{dr}{d\phi} = \frac{1}{r^2} \frac{r^2}{b} = \frac{1}{b}$ (in cui abbiamo usato la prima equazione della sezione). L'equazione (40) può essere risolta perturbativamente, almeno per tutti gli oggetti attrattori per cui si abbia $\frac{m}{r^2} \ll 1$ (ricordiamo che r è la distanza radiale della particella senza massa dal corpo attrattore). Iniziamo col risolvere l'equazione imperturbata

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = 0,$$

questa è l'equazione di un oscillatore armonico con frequenza unitaria; la soluzione, in accordo con le condizioni iniziali, è data da

$$u(\phi) = \frac{1}{b} \sin(\phi). \quad (41)$$

Accendiamo, ora, la perturbazione e cerchiamo una soluzione valida al primo ordine della forma $u(\phi) = u^{(0)}(\phi) + u^{(1)}(\phi)$, in cui $u^{(0)}$ è la soluzione dell'equazione imperturbata (ossia la soluzione (41)) e $u^{(1)}(\phi) \ll u^{(0)}(\phi)$ va ricercata inserendo la $u(\phi)$ nell'equazione (40); facciamolo

$$\begin{aligned} \frac{d^2u^{(0)}}{d\phi^2} + \frac{d^2u^{(1)}}{d\phi^2} + u^{(0)} + u^{(1)} - 3m((u^{(0)})^2 + (u^{(1)})^2 + 2u^{(0)}u^{(1)}) &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{d^2u^{(1)}}{d\phi^2} + u^{(1)} - 3m(u^{(0)})^2 &= 0 \Rightarrow \frac{d^2u^{(1)}}{d\phi^2} + u^{(1)} - 3m \left(\frac{\sin(\phi)}{b} \right)^2 = 0 \end{aligned} \quad (42)$$

in cui abbiamo trascurato gli ordini più elevati e utilizzato il fatto che la soluzione imperturbata risolve l'equazione imperturbata; le condizioni iniziali da imporre sono le stesse imposte in precedenza (ossia $u(\phi = 0) = 0$ e $\frac{du}{d\phi}|_{\phi=0} = \frac{1}{b}$). La soluzione della (42) che soddisfa le condizioni iniziali può essere ricercata con il metodo di somiglianza e porta a trovare

$$u^{(1)}(\phi) = \frac{3m}{2b^2} \left(1 - \frac{4}{3} \cos(\phi) + \frac{1}{3} \cos(2\phi) \right);$$

per cui la soluzione generale della (40) valida al primo ordine si scrive

$$u(\phi) = u^{(0)}(\phi) + u^{(1)}(\phi) = \frac{1}{b} \sin(\phi) + \frac{3m}{2b^2} \left(1 - \frac{4}{3} \cos(\phi) + \frac{1}{3} \cos(2\phi) \right). \quad (43)$$

Finalmente possiamo determinare l'angolo di deflessione δ ; utilizzando l'informazione che $u(\pi + \delta) = 0$ e le formule di somma per seno e coseno ($\cos(i + j) = \cos(i)\cos(j) - \sin(i)\sin(j)$ e $\sin(i + j) = \sin(i)\cos(j) + \cos(i)\sin(j)$) otteniamo

$$\begin{aligned} 0 = u(\pi + \delta) &= \frac{1}{b} \sin(\pi + \delta) + \frac{3m}{2b^2} \left(1 - \frac{4}{3} \cos(\pi + \delta) + \frac{1}{3} \cos(2\pi + 2\delta) \right) = \\ &= -\frac{\sin(\delta)}{b} + \frac{3m}{2b^2} \left(1 + \frac{4}{3} \cos(\delta) + \frac{1}{3} \cos(2\delta) \right) \approx -\frac{\delta}{b} + \frac{3m}{2b^2} \frac{8}{3} = -\frac{\delta}{b} + \frac{4m}{b^2}, \end{aligned}$$

per cui l'angolo di deflessione è

$$\delta = \frac{4m}{b}. \quad (44)$$

Per esempio, un fotone che passa ad una distanza dal sole di 1000 km viene deflesso di un angolo pari a

$$\delta = \frac{4GM_{Sole}}{c^2(R_{Sole} + 1000km)} \approx 8,2 \cdot 10^{-6} rad = 1,69'' \approx (5 \cdot 10^{-4})^\circ.$$

23 Utilizzando le equazioni delle geodetiche per particelle di massa nulla nella metrica di Schwarzschild $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\dot{t} = \frac{E}{(1-\frac{2m}{r})}$, $\dot{\phi} = \frac{L}{r^2}$, $\dot{r}^2 = E^2 - (1 + \frac{L^2}{r^2})(1 - \frac{2m}{r})$ derivare e discutere il fenomeno della precessione del perielio.

Vogliamo usare le equazioni delle geodetiche nel caso di particelle massive per studiare il moto dei pianeti attorno ad una stella; infine vogliamo calcolare l'angolo di cui precede l'orbita di Mercurio. Anche questo fu un test importante per la relatività generale, infatti la teoria newtoniana prevede una precessione del perielio di Mercurio, dovuto all'interazione con gli altri pianeti e principalmente con Giove, ma il valore predetto non è in accordo con il valore misurato ed era errato di circa $43''$.

Definiamo la variabile $u = \frac{1}{r}$ e riscriviamo l'equazione delle geodetiche per \dot{r}^2 in termini di questa nuova variabile, preliminarmente abbiamo (usando anche l'equazione delle geodetiche per $\dot{\phi}$)

$$\frac{dr}{dq} = \frac{dr}{d\phi} \frac{d\phi}{dq} = \frac{d}{d\phi} \left(\frac{1}{u} \right) \frac{d\phi}{dq} = -\frac{1}{u^2} \frac{du}{d\phi} \frac{d\phi}{dq} = -\frac{1}{u^2} \frac{du}{d\phi} L u^2 = -L \frac{du}{d\phi},$$

e sostituendo nell'equazione delle geodetiche per \dot{r}^2

$$\begin{aligned} L^2 \left(\frac{du}{d\phi} \right)^2 &= E^2 - (1 + L^2 u^2)(1 - 2mu) = E^2 - 1 + 2mu - L^2 u^2 + 2L^2 mu^3 \Rightarrow \\ &\Rightarrow 2L^2 \left(\frac{du}{d\phi} \right) \left(\frac{d^2 u}{d\phi^2} \right) = 2m \frac{du}{d\phi} - 2L^2 u \frac{du}{d\phi} + 6mL^2 u^2 \frac{du}{d\phi}; \end{aligned}$$

in cui abbiamo differenziato rispetto a ϕ . Dividendo per $2L^2 \frac{du}{d\phi}$ otteniamo l'equazione che determina il moto di un corpo attorno ad un altro

$$\frac{d^2 u}{d\phi^2} = \frac{m}{L^2} - u + 3mu^2 \Rightarrow \frac{d^2 u}{d\phi^2} - \frac{m}{L^2} + u - 3mu^2 = 0; \quad (45)$$

come nel caso precedente, la (45) si può risolvere perturbativamente in tutti i casi in cui si abbia $\frac{m}{r} \ll 1$. Cominciamo dall'imperturbata,

$$\frac{d^2 u}{d\phi^2} - \frac{m}{L^2} + u = 0 \Rightarrow \frac{d^2}{d\phi^2} \left(u - \frac{m}{L^2} \right) + \left(u - \frac{m}{L^2} \right) = 0;$$

la cui soluzione generale (come si vede è un oscillatore armonico) è data da

$$u - \frac{m}{L^2} = C \cos(\phi - c) \Rightarrow u = \frac{m}{L^2} + C \cos(\phi - c) = \frac{m}{L^2} \left(1 + \frac{CL^2}{m} \cos(\phi - c) \right) = \frac{m}{L^2} \left(1 + \epsilon \cos(\phi - c) \right), \quad (46)$$

in cui C e c sono due costanti di integrazione arbitrarie e $\epsilon = \frac{CL^2}{m}$. Notiamo, prima di andare avanti, che questa soluzione descrive un'orbita ellittica in coordinate polari e possiamo quindi assumere che ϵ sia l'eccentricità dell'orbita, infatti

$$r = \frac{L^2}{m} \frac{1}{1 + \epsilon \cos(\phi - c)};$$

inoltre sappiamo che $\frac{m^2}{L^2} \ll 1$ dato che al periastrò (quando il corpo in esame è alla minima distanza dal corpo centrale e quindi il coseno è massimo ossia $\phi = 0$) si ha

$$r_{per} = \frac{L^2}{m} \frac{1}{1 + \epsilon} \Rightarrow \frac{m^2}{L^2} = \frac{m}{r_{per}(1 + \epsilon)},$$

e siccome, per ipotesi, $\frac{m}{r} \ll 1$ segue che anche $\frac{m^2}{L^2} \ll 1$. Da questa condizione possiamo anche porre la costante c nulla.

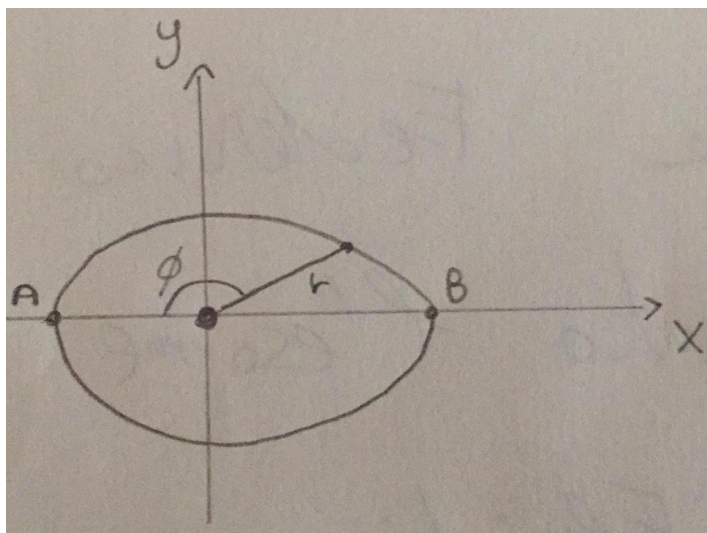


Figura 12: Sistema di riferimento per lo studio di un corpo orbitante attorno ad un altro. I punti A e B corrispondono rispettivamente al periastro (quando il corpo orbitante è alla distanza minima dal corpo attrattore, e quindi ha velocità orbitale maggiore) e l'apastro (quando il corpo orbitante è alla distanza massima dal corpo attrattore, e quindi ha velocità orbitale minore).

Inseriamo, ora, la perturbazione e cerchiamo una soluzione valida al primo ordine della forma $u(\phi) = u^{(0)}(\phi) + u^{(1)}(\phi)$, in cui $u^{(0)}$ è la soluzione dell'equazione imperturbata (ossia la soluzione (46)) e $u^{(1)}(\phi) \ll u^{(0)}(\phi)$ va ricercata inserendo la $u(\phi)$ nell'equazione (45):

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u^{(0)}}{d\phi^2} + \frac{d^2 u^{(1)}}{d\phi^2} - \frac{m}{L^2} + u^{(0)} + u^{(1)} - 3m((u^{(0)})^2 + (u^{(1)})^2 + 2u^{(0)}u^{(1)}) &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{d^2 u^{(1)}}{d\phi^2} + u^{(1)} - 3m(u^{(0)})^2 &= 0 \Rightarrow \frac{d^2 u^{(1)}}{d\phi^2} + u^{(1)} - 3m\left(\frac{m}{L^2}(1 + \epsilon \cos(\phi))\right)^2 = \\ = \frac{d^2 u^{(1)}}{d\phi^2} + u^{(1)} - \frac{3m^3}{L^4}\left(1 + \epsilon^2 \cos^2(\phi) + 2\epsilon \cos(\phi)\right) &\approx \frac{d^2 u^{(1)}}{d\phi^2} + u^{(1)} - \frac{6m^3}{L^4}\epsilon \cos(\phi) \end{aligned} \quad (47)$$

in cui abbiamo trascurato gli ordini più elevati e utilizzato il fatto che la soluzione imperturbata risolve l'equazione imperturbata. Nell'ultimo passaggio, dato che l'equazione descrive un oscillatore forzato la cui frequenza di risonanza è unitaria, abbiamo tenuto solo il termine risonante (infatti il termine costante ha frequenza "infinita" mentre il termine $\cos^2(\phi)$ contiene un termine costante e un termine con frequenza doppia rispetto a quella di risonanza). La soluzione della (47) può essere trovata col metodo della variazione delle costanti oppure con la trasformata di Laplace (o di Fourier) ed è pari a

$$u^{(1)}(\phi) = \frac{3\epsilon m^3}{L^4} \phi \sin(\phi);$$

per cui la soluzione generale della (45), valida al primo ordine, è data da

$$u(\phi) = u^{(0)}(\phi) + u^{(1)}(\phi) = \frac{m}{L^2} \left(1 + \epsilon \cos(\phi)\right) + \frac{3\epsilon m^3}{L^4} \phi \sin(\phi) = \frac{m}{L^2} \left(1 + \epsilon \left(\cos(\phi) + \frac{3m^2}{L^2} \phi \sin(\phi)\right)\right). \quad (48)$$

Come precedentemente mostrato $\frac{m^2}{L^2} \ll 1$ per cui possiamo scrivere il coefficiente 1 davanti al coseno e la quantità $\frac{3m^3}{L^2} \phi$ davanti al seno della (48) come sviluppi di Taylor di funzioni trigonometriche per poi usare la formula di sottrazione del coseno ($\cos(i - j) = \cos(i)\cos(j) + \sin(i)\sin(j)$), ossia

$$\begin{aligned} u(\phi) = \frac{m}{L^2} \left(1 + \epsilon \left(\cos(\phi) + \frac{3m^2}{L^2} \phi \sin(\phi)\right)\right) &\approx \frac{m}{L^2} \left(1 + \epsilon \left(\cos\left(\phi - \frac{3m^2}{L^2} \phi\right) \cos(\phi) + \sin\left(\frac{3m^2}{L^2} \phi\right) \sin(\phi)\right)\right) = \\ &= \frac{m}{L^2} \left(1 + \epsilon \cos\left(\phi - \frac{3m^2}{L^2} \phi\right)\right). \end{aligned}$$

Ritornando alla variabile radiale abbiamo

$$r = \frac{1}{u(\phi)} = \frac{L^2}{m} \frac{1}{1 + \epsilon \cos\left(\phi - \frac{3m^2}{L^2} \phi\right)};$$

il corpo orbitante tornerà, ad esempio, al periastro quando il coseno avrà compiuto un periodo intero ossia quando avrà compiuto un angolo pari a 2π , quindi dall'equazione appena scritta troviamo

$$\phi - \frac{3m^2}{L^2}\phi = \phi\left(1 - \frac{3m^2}{L^2}\right) = 2\pi \Rightarrow \phi = \frac{2\pi}{\left(1 - \frac{3m^2}{L^2}\right)} \approx 2\pi\left(1 + \frac{3m^2}{L^2}\right);$$

che è pari a 2π più una piccola correzione. In sostanza quello che accade è che quando il corpo orbitante compie una rivoluzione intera (pari ad un angolo di 2π) attorno al corpo sorgente anche la sua orbita ruota leggermente (sempre planarmente) di una quantità pari a

$$\delta\phi = \frac{6\pi m^2}{L^2}; \quad (49)$$

che esprime appunto l'angolo di cui ruota l'orbita in una rivoluzione del pianeta orbitante. In realtà, quindi, Keplero aveva solo in parte ragione: le orbite sono ellittiche ma ruotano di una piccola quantità ad ogni rivoluzione completa del corpo che la descrive; questo tipo di movimento è detto precessione dell'orbita. Generalmente gli angoli di precessione per rivoluzione sono molto piccoli quindi si calcola invece l'angolo di precessione per secolo ossia la (49) moltiplicata per il numero di rivoluzioni in 100 anni terrestri; indicando con T il periodo di rivoluzione (espresso in anni terrestri) del pianeta orbitante, questo compirà $N = \frac{100ys}{T}$ e si avrà che in un secolo la sua orbita precede di un angolo pari a

$$\delta\phi_{secolo} = \frac{6\pi m^2}{L^2}N;$$

nel caso di Mercurio, $T = 0,241ys$ per cui $N = \frac{100ys}{0,241ys} = 414,94$ di conseguenza

$$\delta\phi_{secolo} = \frac{6\pi G^2 M_{Sole}^2}{c^4 (v_{orb}(R_{Sole} + d_{SM}))^2} c^2 N \approx 2,03 \cdot 10^{-4} rad = 41,87'' \approx (1 \cdot 10^{-2})^\circ$$

in cui $v_{orb} = 47,36 \frac{km}{s}$ è la velocità orbitale di Mercurio e $d_{SM} = 5,79 \cdot 10^7 km$ è la s distanza Mercurio Sole. Il fattore c^2 a moltiplicare serve per aggiustare le unità di misura.

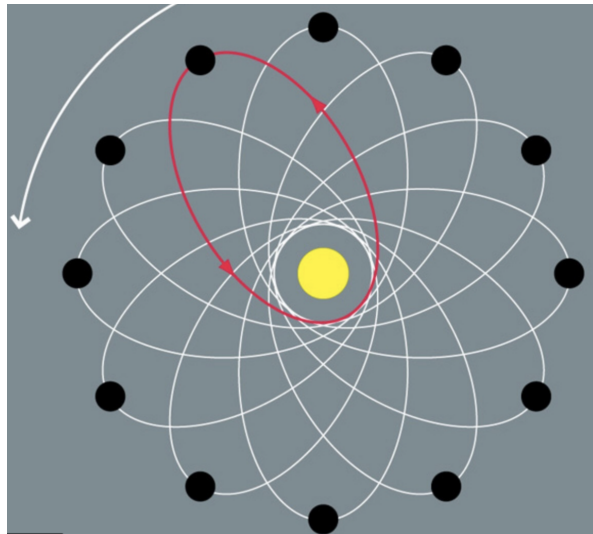


Figura 13: Illustrazione della precessione dell'orbita. I corpi orbitanti compiono ellissi che ruotano nel tempo; l'effetto riportato dalla fuga è enormemente esagerato considerando che, ad esempio nel caso di Mercurio, l'orbita precede di circa $0,1''$ ogni rivoluzione del pianeta. Per compiere una precessione di 360° , l'orbita di Mercurio impiegherebbe circa 36000 secoli (ossia 3,6 milioni di anni).

24 Descrivere il moto di una particella massiva che cada radialmente in un buco nero di Schwarzschild. Discutere il problema sia dal punto di vista di un osservatore all'infinito, che di un osservatore solidale con la particella.

Per descrivere questo fenomeno utilizziamo la metrica di Schwarzschild e quindi le equazioni delle geodetiche nell'appena detta metrica. Essendo la caduta radiale, l'unica componente della velocità diversa da zero è quella radiale; le

equazioni delle geodetiche si riducono a (notare che $L = 0$ dato che $\dot{\phi} = \frac{L}{r^2} = 0$)

$$\dot{t} = \frac{E}{\left(1 - \frac{2m}{r}\right)};$$

$$\dot{r}^2 = E^2 - \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \Rightarrow \dot{r} = -\sqrt{E^2 - 1 + \frac{2m}{r}};$$

in cui si sceglie solo il segno negativo dato che la particella si sta avvicinando al buco nero. Se imponiamo che la particella sia a riposo all'infinito (che $\dot{r} = 0$), vediamo che facendo il limite per $r \rightarrow \infty$ della seconda delle equazioni sopra scritte otteniamo che

$$0 = \lim_{r \rightarrow \infty} \dot{r} = \lim_{r \rightarrow \infty} -\sqrt{E^2 - 1 + \frac{2m}{r}} = -\sqrt{E^2 - 1} \Rightarrow E^2 = 1;$$

essendo E^2 una costante del moto deve avere lo stesso valore sempre, per cui le precedenti equazioni delle geodetiche si semplificano

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\left(1 - \frac{2m}{r}\right)};$$

$$\frac{dr}{d\tau} = -\sqrt{\frac{2m}{r}};$$
(50)

in cui τ è il tempo proprio. Integriamo le equazioni (50); dalla seconda otteniamo direttamente il tempo proprio,

$$d\tau = -\sqrt{\frac{r}{2m}} dr \Rightarrow \int_0^\tau d\tau' = -\int_{r(\tau=0) \equiv r_0}^{r(\tau)} \sqrt{\frac{r'}{2m}} dr' \Rightarrow \tau(r) = \frac{2}{3} r_0^{\frac{3}{2}} - r^{\frac{3}{2}}. \quad (51)$$

Per ottenere il tempo di un osservatore non solidale con il corpo che viene inghiottito dal buco nero dobbiamo combinare le due equazioni (50):

$$\frac{dt}{dr} = \frac{dt}{d\tau} \frac{d\tau}{dr} = -\frac{1}{\left(1 - \frac{2m}{r}\right)} \sqrt{\frac{r}{2m}} \Rightarrow \int_0^t dt' = -\int_{r(t=0) \equiv r_0}^{r(t)} \frac{1}{\left(1 - \frac{2m}{r'}\right)} \sqrt{\frac{r'}{2m}} dr' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t(r) = \frac{2}{3} \frac{1}{\sqrt{2m}} \left(r_0^{\frac{3}{2}} - r^{\frac{3}{2}} + 6mr_0^{\frac{1}{2}} - 6mr^{\frac{1}{2}} \right) + 2m \ln \left[\frac{(\sqrt{r_0} - \sqrt{2m})(\sqrt{r} + \sqrt{2m})}{(\sqrt{r_0} + \sqrt{2m})(\sqrt{r} - \sqrt{2m})} \right]. \quad (52)$$

Notiamo due cose importanti: nell'avvicinarsi all'orizzonte degli eventi (ossia nel limite in cui $r \rightarrow 2m$) la (51) ha un comportamento regolare mentre la (52) diverge logicamente. Questo significa che mentre per un osservatore solidale con l'oggetto attratto il passaggio attraverso l'orizzonte degli eventi avviene impercettibilmente, per un osservatore non solidale con l'oggetto vedrà quest'ultimo raggiungere l'orizzonte degli eventi solo in un tempo infinito. Allo stesso modo se considerassimo le funzioni inverse di $t(r)$ e $\tau(r)$ otterremmo delle funzioni che esprimono la coordinata radiale in funzione del tempo (coordinato o proprio che sia) e avremmo che un osservatore solidale con il corpo attratto raggiungerebbe l'orizzonte degli eventi in un tempo finito mentre un osservatore non solidale con il corpo lo vedrebbe raggiungere solo asintoticamente.

25 Ricavare l'equazione della deviazione geodetica.

L'equazione della deviazione geodetica che descrive l'accelerazione relativa tra due particelle, ci permette di determinare se siamo in presenza di un campo gravitazionale. Il principio di equivalenza ci permette di simulare un campo gravitazionale (solo localmente) all'interno di uno spazio piatto e possiamo misurarne gli effetti tramite il moto di una particella; il problema è che solo con una particella non siamo in grado di comprendere se il campo gravitazionale è presente sul serio (e quindi siamo su uno spazio curvo) oppure se è solo simulato localmente (dal principio di equivalenza).

Per derivare l'equazione della deviazione geodetica partiamo da due particelle che percorrono due geodetiche; indichiamo la prima geodetica con $x^\mu(\tau)$ e la seconda $x^\mu(\tau) + \delta x^\mu$ in cui le due geodetiche sono separate dalla quantità δx^μ e τ è il parametro affine. Quanto detto è equivalente a considerare una famiglia di geodetiche a due parametri, $x^\mu(\tau, p)$, in cui τ è il parametro affine e p il parametro che classifica geodetiche differenti (vedere figura 14).

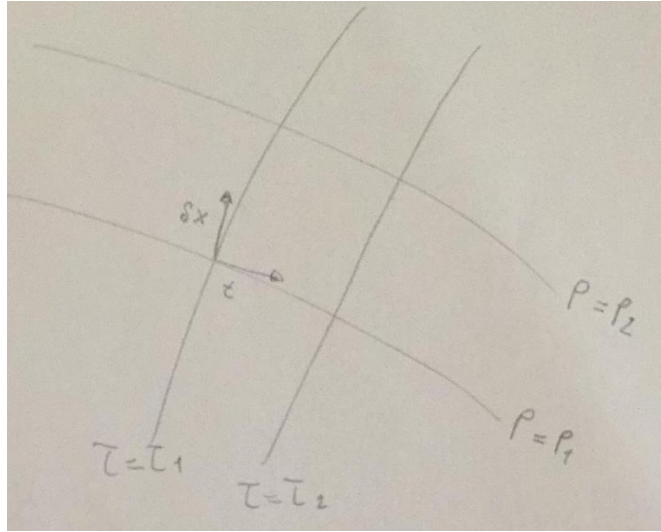


Figura 14: Famiglia di geodetiche a due parametri, τ e p .

Per quanto detto, il vettore tangente si scrive $t^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial \tau}$ mentre $\delta x^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial p}$; dal teorema di Schwarz notiamo che

$$\frac{\partial t^\mu}{\partial p} = \frac{\partial^2 x^\mu}{\partial p \partial \tau} = \frac{\delta x^\mu}{\partial \tau}.$$

Calcoliamo la derivata covariante del vettore tangente t^μ rispetto al vettore δx^μ

$$(\nabla_{\delta x} t)^\alpha = \delta x^\mu t^\alpha{}_{;\mu} = \frac{\partial x^\mu}{\partial p} \left(\frac{\partial t^\alpha}{\partial x^\mu} + \Gamma_{\nu\mu}^\alpha t^\nu \right) = \frac{\partial t^\alpha}{\partial p} + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha t^\nu \frac{\partial x^\mu}{\partial p} = \frac{\partial t^\alpha}{\partial p} + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha t^\nu \delta x^\mu;$$

analogamente calcoliamo la derivata covariante del vettore δx^μ rispetto al vettore t^μ

$$(\nabla_t \delta x)^\alpha = t^\mu \delta x^\alpha{}_{;\mu} = \frac{\partial x^\mu}{\partial \tau} \left(\frac{\partial \delta x^\alpha}{\partial x^\mu} + \Gamma_{\nu\mu}^\alpha \delta x^\nu \right) = \frac{\partial \delta x^\alpha}{\partial \tau} + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \delta x^\nu \frac{\partial x^\mu}{\partial \tau} = \frac{\partial \delta x^\alpha}{\partial \tau} + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \delta x^\nu t^\mu;$$

notiamo che, per la prima equazione del paragrafo e per la simmetria degli indici bassi dei simboli della connessione, le due derivate covarianti sono uguali $(\nabla_{\delta x} t)^\alpha = (\nabla_t \delta x)^\alpha$. Le quantità appena ricavate contengono solo i simboli della connessione affine, che seppur legati alla geometria curva (e quindi al campo gravitazionale) non danno sufficienti informazioni; dobbiamo calcolare le derivate covarianti seconde. Nello specifico vogliamo calcolare $\nabla_t(\nabla_t \delta x)$; notiamo che possiamo calcolarla partendo dal seguente commutatore $[\nabla_t, \nabla_{\delta x}]t$, infatti

$$([\nabla_t, \nabla_{\delta x}]t)^\alpha = (\nabla_t(\nabla_{\delta x} t))^\alpha - (\nabla_{\delta x}(\nabla_t t))^\alpha = (\nabla_t(\nabla_{\delta x} t))^\alpha = (\nabla_t(\nabla_t \delta x))^\alpha,$$

in cui nel secondo passaggio abbiamo usato il fatto che la derivata covariante lungo il vettore tangente alla geodetica del vettore tangente alla geodetica è identicamente nulla e nell'ultimo passaggio si è sfruttato che $(\nabla_{\delta x} t)^\alpha = (\nabla_t \delta x)^\alpha$. Sappiamo che il commutatore di derivate covarianti è dato dal tensore di Riemann, dobbiamo però notare che l'unico indice libero è α per cui tutti gli altri indici del tensore di Riemann devono essere saturati

$$([\nabla_t, \nabla_{\delta x}]t)^\alpha = R_{\mu\nu\beta}^\alpha t^\mu t^\nu \delta x^\beta.$$

In definitiva abbiamo

$$(\nabla_t(\nabla_t \delta x))^\alpha = ([\nabla_t, \nabla_{\delta x}]t)^\alpha = R_{\mu\nu\beta}^\alpha t^\mu t^\nu \delta x^\beta \Rightarrow (\nabla_t(\nabla_t \delta x))^\alpha = R_{\mu\nu\beta}^\alpha t^\mu t^\nu \delta x^\beta, \quad (53)$$

l'equazione (53) è detta equazione della deviazione geodetica; il primo membro misura l'accelerazione relativa di due geodetiche vicine, il secondo membro è strettamente legato al campo gravitazionale in quanto contiene il tensore di Riemann che si annulla solo su spazio piatto (e quindi solo in assenza di campo gravitazionale).

26 Mostrare che le equazioni di Einstein $\square_P h_{\mu\nu} - \left[\frac{\partial^2}{\partial x^\lambda \partial x^\mu} h_\nu^\lambda + \frac{\partial^2}{\partial x^\lambda \partial x^\nu} h_\mu^\lambda - \frac{\partial^2}{\partial x^\mu \partial x^\nu} h_\lambda^\lambda \right] = -\frac{16\pi G}{c^4} \left(T_{\mu\nu}^{(pert)} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T_\lambda^{\lambda(pert)} \right)$ per la metrica $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ con $|h_{\mu\nu}| \ll 1$, con un'opportuna scelta di gauge e ponendo $\bar{h}_{\mu\nu} \equiv h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} h_\lambda^\lambda$, si possono scrivere nella forma $\square_P \bar{h}_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}^{(pert)}$ accompagnate da $\frac{\partial}{\partial x^\mu} \bar{h}_\nu^\mu = 0$.

L'idea delle onde gravitazionali è una delle più interessanti della teoria generale della relatività. La teoria prevede l'esistenza di soluzioni ondose delle equazioni di campo, ossia che le perturbazioni del campo gravitazionale si propagano come onde non nello ma dello spazio-tempo. Le onde gravitazionali sono onde metriche che si propagano distorcendo il tessuto stesso dello spazio e del tempo. L'approccio per ottenere questo tipo di soluzioni non può che essere perturbativo date la forte non linearità delle equazioni di campo (che rende una soluzione esatta quasi impossibile se non in molti pochi casi particolari) e la debolezza di questa perturbazione metrica (che altrimenti sarebbe stata osservata molto tempo prima, mentre i primi dati certi sono del 2015). Data una metrica del tipo $g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}^0 + h_{\mu\nu}$, in cui $g_{\mu\nu}^0$ è la metrica di fondo e $h_{\mu\nu}$ è la perturbazione in modulo di molto minore di 1, l'approccio perturbativo porta a considerare, nelle equazioni di campo, solo termini del primo ordine nella perturbazione della metrica e nel caso di metrica di fondo piatta (che è il caso che ci permette anche di studiare le onde gravitazionali da un punto di vista osservativo) le equazioni di campo si riducono a

$$\square_P h_{\mu\nu} - \left[\frac{\partial^2}{\partial x^\lambda \partial x^\mu} h_\nu^\lambda + \frac{\partial^2}{\partial x^\lambda \partial x^\nu} h_\mu^\lambda - \frac{\partial^2}{\partial x^\mu \partial x^\nu} h_\lambda^\lambda \right] = -\frac{16\pi G}{c^4} \left(T_{\mu\nu}^{(pert)} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} T_\lambda^{\lambda(pert)} \right)$$

in cui \square_P è l'operatore di d'Alembert su spazio piatto. Come sappiamo le equazioni di campo non determinano unicamente la soluzione per via della gauge; in questo contesto siamo interessati solo a quei diffeomorfismi che preservano la condizione $|h_{\mu\nu}| \ll 1$, almeno al primo ordine, ossia che la metrica perturbante trasformata sia tale che $|h'_{\mu\nu}| \ll 1$. La scelta di gauge che facciamo è richiedere la gauge armonica $g^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\nu}^\lambda = 0$; questa scelta di gauge può essere riscritta; infatti

$$\begin{aligned} 0 &= g^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} g^{\lambda\gamma} [-g_{\mu\nu,\gamma} + g_{\gamma\mu,\nu} + g_{\nu\gamma,\mu}] = \\ &= \frac{1}{2} (\eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}) (\eta^{\lambda\gamma} - h^{\lambda\gamma}) [-\eta_{\mu\nu,\gamma} + \eta_{\gamma\mu,\nu} + \eta_{\nu\gamma,\mu} - h_{\mu\nu,\gamma} + h_{\gamma\mu,\nu} + h_{\nu\gamma,\mu}] = \\ &= \frac{1}{2} (\eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}) (\eta^{\lambda\gamma} - h^{\lambda\gamma}) [-h_{\mu\nu,\gamma} + h_{\gamma\mu,\nu} + h_{\nu\gamma,\mu}] = \frac{1}{2} (\eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}) (\eta^{\lambda\gamma} - h^{\lambda\gamma}) [-h_{\mu\nu,\gamma} + h_{\gamma\mu,\nu} + h_{\nu\gamma,\mu}] \approx \\ &\approx \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} \eta^{\lambda\gamma} [-h_{\mu\nu,\gamma} + h_{\gamma\mu,\nu} + h_{\nu\gamma,\mu}] = \frac{1}{2} \eta^{\lambda\gamma} [-h_{\nu,\gamma}^\nu + h_{\gamma,\nu}^\nu + h_{\gamma,\mu}^\mu] = \eta^{\lambda\gamma} \left[-\frac{1}{2} h_{\nu,\gamma}^\nu + h_{\gamma,\mu}^\mu \right]; \end{aligned}$$

ossia

$$\frac{1}{2} h_{\lambda,\nu}^\lambda = h_{\nu,\lambda}^\lambda. \quad (54)$$

Grazie alla (54) il termine tra parentesi quadre della prima equazione della sezione è nullo, e le equazioni di campo si riducono all'equazione delle onde non omogenea affiancata dalla scelta di gauge armonico

$$\begin{cases} \square_P h_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4} \left(T_{\mu\nu}^{(pert)} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} T_\lambda^{\lambda(pert)} \right) \\ \frac{1}{2} h_{\lambda,\nu}^\lambda = h_{\nu,\lambda}^\lambda \end{cases}. \quad (55)$$

Per semplificare ulteriormente le equazioni (55), definiamo $\bar{h}_{\mu\nu} := h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} h$ in cui h è la traccia di $h_{\mu\nu}$. Alzando un indice della precedente equazione abbiamo (le contrazioni sono fatte con la metrica piatta perchè lavoriamo al primo ordine nella perturbazione)

$$\begin{aligned} \eta^{\lambda\mu} \bar{h}_{\mu\nu} &= \bar{h}_\nu^\lambda = \eta^{\lambda\mu} h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta^{\lambda\mu} \eta_{\mu\nu} h = h_\nu^\lambda - \frac{1}{2} \delta_\nu^\lambda h \Rightarrow \\ &\Rightarrow \bar{h}_{\nu,\lambda}^\lambda = h_{\nu,\lambda}^\lambda - \frac{1}{2} h_{\lambda,\nu}^\lambda; \end{aligned}$$

se richiediamo che $\bar{h}_{\nu,\lambda}^\lambda = 0$ otteniamo esattamente la seconda delle (55). Per quanto riguarda la riscrittura della prima delle (55) dobbiamo prima capire a cosa sia uguale la quantità $\square_P h$, per vederlo tracciamo sulla prima equazione delle (55) (ricordando che la traccia della metrica di Minkowski è pari a 4)

$$\square_P h = -\frac{16\pi G}{c^4} \left(T^{(pert)} - 2T^{(pert)} \right) = \frac{16\pi G}{c^4} T^{(pert)},$$

in cui le quantità senza indici indicano le traccie. Fatto questo, la seconda delle (55) si riscrive in termini di $\bar{h}_{\mu\nu}$; infatti

$$\begin{aligned}\square_P \bar{h}_{\mu\nu} &= -\frac{16\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}^{(pert)} \Rightarrow \square_P h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \square_P h = \square_P h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \frac{16\pi G}{c^4} T^{(pert)} = -\frac{16\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}^{(pert)} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \square_P h_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4} \left(T_{\mu\nu}^{(pert)} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} T^{(pert)} \right)\end{aligned}$$

che è esattamente la seconda delle (55). In conclusione le equazioni di campo linearizzate nel caso di piccola perturbazione dello spazio piatto (le equazioni che descrivono il comportamento delle onde gravitazionali che si propagano in spazio piatto) si scrivono

$$\begin{cases} \square_P \bar{h}_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}^{(pert)} \\ \bar{h}_{\nu,\lambda}^\lambda = 0 \end{cases} \quad (56)$$

Fuori dalla sorgente perturbante il tensore energia-impulso si annulla ed otteniamo esattamente l'equazione delle onde omogenea corredata dalla gauge armonica. E' interessante notare che nell'operatore di d'Alambert compare la velocità della luce, il che vuol dire che la perturbazione gravitazionale si propaga a velocità luminare nello spazio tempo. Nel caso in cui la metrica di fondo non sia la metrica piatta le equazioni sono leggermente modificate; infatti la curvatura dello spazio modifica la propagazione dell'onda agendo come fosse una barriera di potenziale dalla quale l'onda può venir diffusa. Inoltre, le equazioni delle onde gravitazionali ammettono, in determinate circostanze, soluzioni di tipo solitonico.

27 Si dimostri che le equazioni delle onde gravitazionali nel vuoto ammettono soluzioni di onda piana. Scegliendo la gauge in maniera opportuna (spiegando anche che, con tale scelta, la condizione di gauge armonica rimane soddisfatta), si dimostri che le onde gravitazionali sono trasverse, a traccia nulla e hanno due soli stati di polarizzazione.

Data l'equazione delle onde gravitazionali, ci viene in mente la possibilità che l'onda sia monocromatica ossia della forma $\bar{h}_{\mu\nu} = A_{\mu\nu} e^{ik_\alpha x^\alpha}$ in cui $A_{\mu\nu}$ è il tensore di polarizzazione che tiene conto anche dell'ampiezza dell'onda e $k_\alpha = \left(\frac{\omega}{c}, k_x, k_y, k_z\right)$ è il quadrivettore d'onda sul quale avremo delle restrizioni affinché l'onda piana sia soluzione; sostituiamo la forma della soluzione cercata nelle equazioni delle onde gravitazionali nel vuoto

$$\begin{cases} \square_P \bar{h}_{\mu\nu} = 0 \Rightarrow \eta^{\gamma\delta} \frac{\partial}{\partial x^\gamma} \frac{\partial}{\partial x^\delta} (A_{\mu\nu} e^{ik_\alpha x^\alpha}) = -\eta^{\gamma\delta} k_\gamma k_\delta (A_{\mu\nu} e^{ik_\alpha x^\alpha}) = 0 \Rightarrow \eta^{\gamma\delta} k_\gamma k_\delta = 0 \\ \bar{h}_{\nu,\lambda}^\lambda = 0 \Rightarrow \eta^{\lambda\gamma} \bar{h}_{\gamma\nu,\lambda} = i\eta^{\lambda\gamma} A_{\gamma\nu} k_\lambda (e^{ik_\alpha x^\alpha}) = 0 \Rightarrow \eta^{\lambda\gamma} A_{\gamma\nu} k_\lambda = 0 \end{cases} \quad (57)$$

La prima delle (57) esprime la richiesta che il quadrivettore d'onda sia di tipo luce (conseguentemente l'onda si propaga a velocità luminare) mentre la seconda esprime l'ortogonalità tra il tensore di polarizzazione e il quadrivettore d'onda. Dalla richiesta $k_\mu k^\mu = -(k_0)^2 + (k_1)^2 + (k_2)^2 + (k_3)^2 = 0$ ricaviamo la frequenza dell'onda gravitazionale

$$\omega = ck_0 = c\sqrt{(k_1)^2 + (k_2)^2 + (k_3)^2};$$

figurativamente la frequenza (divisa per la velocità della luce) dell'onda è posta sulla superficie di una sfera tridimensionale centrata nell'origine nello spazio degli impulsi.

Sappiamo che il tensore della perturbazione metrica dovrebbe avere 10 componenti indipendenti ma vogliamo capire quante di queste siano realmente indipendenti e quindi possedere informazioni fisiche sull'onda. A tale scopo immaginiamo un'onda che si propaghi nella direzione z , le equazioni delle onde gravitazionali nei vuoti si semplificano in

$$\begin{cases} \square_P \bar{h}_{\mu\nu} = 0 \Rightarrow \left(-\frac{\partial^2}{c^2 \partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) \bar{h}_{\mu\nu} = 0 \\ \bar{h}_{\nu,\lambda}^\lambda = 0 \Rightarrow \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \bar{h}_\nu^0 + \frac{\partial}{\partial z} \bar{h}_\nu^3 = 0 \end{cases}$$

La prima ci dice che la perturbazione è un'arbitraria funzione delle variabili $\chi_\pm = t \pm \frac{z}{c}$; se sostituiamo questa informazione nella seconda, avendo supposto di avere a che fare solo con un'onda progressiva (ossia che dipenda solo da χ_-), otteniamo

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \bar{h}_\nu^0 + \frac{\partial}{\partial z} \bar{h}_\nu^3 = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial \chi_-} \frac{\partial \chi_-}{\partial t} \left(\bar{h}_\nu^0\right) + \frac{\partial}{\partial \chi_-} \frac{\partial \chi_-}{\partial z} \left(\bar{h}_\nu^3\right) = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial \chi_-} \left(\bar{h}_\nu^0 - \bar{h}_\nu^3\right) = 0 \Rightarrow \bar{h}_\nu^0 = \bar{h}_\nu^3. \quad (58)$$

A questo punto notiamo che la scelta della gauge armonica non fissa completamente la gauge ma ci lascia ancora delle libertà. Se operiamo il cambio di coordinate $x'^\mu = x^\mu + \epsilon^\mu$ i simboli della connessione contratti su entrambi gli indici bassi trasformano secondo

$$\Gamma'^\alpha = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\rho} \Gamma^\rho - g^{\sigma\rho} \frac{\partial^2 x'^\alpha}{\partial x^\rho \partial x^\sigma},$$

ma noi siamo nella gauge armonica e, nonostante il nuovo cambio di coordinate, vogliamo rimanerci per cui deve essere $\Gamma^\rho = 0$ ma anche $\Gamma'^\alpha = 0$ per cui l'unica soluzione è che

$$g^{\sigma\rho} \frac{\partial^2 x'^\alpha}{\partial x^\rho \partial x^\sigma} = 0.$$

Questa condizione, che assicura il fatto che la gauge armonica sia ancora soddisfatta nonostante il nuovo diffeomorfismo, può essere riscritta sostituendo $x'^\mu = x^\mu + \epsilon^\mu$:

$$g^{\sigma\rho} \frac{\partial^2 x'^\alpha}{\partial x^\rho \partial x^\sigma} = g^{\sigma\rho} \left[\frac{\partial}{\partial x^\rho} \left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial x^\sigma} + \frac{\partial \epsilon^\alpha}{\partial x^\sigma} \right) \right] = g^{\sigma\rho} \left[\frac{\partial}{\partial x^\rho} \left(\delta_\sigma^\alpha + \frac{\partial \epsilon^\alpha}{\partial x^\sigma} \right) \right] = g^{\sigma\rho} \left[\frac{\partial}{\partial x^\rho} \frac{\partial}{\partial x^\sigma} \epsilon^\alpha \right] = \square_C \epsilon^\alpha = 0,$$

in cui \square_C è il dalembertiano su spazio curvo; poichè, in questo caso, la metrica generale è solo lievemente perturbata rispetto alla metrica piatta, possiamo scrivere $\square_C \epsilon^\alpha \approx \square_P \epsilon^\alpha = 0$. Il verificarsi della condizione appena esposta assicura che la gauge armonica resti soddisfatta anche facendo un ulteriore diffeomorfismo, con il quale abbiamo, però, esaurito completamente la libertà di gauge.

Avendo a nostra disposizione questa residua scelta di gauge, la utilizziamo per porre a zero alcune componenti della metrica perturbatrice; nello specifico poniamo

$$\bar{h}_1^0 = \bar{h}_2^0 = \bar{h}_3^0 = \bar{h}_1^1 + \bar{h}_2^2 = 0; \quad (59)$$

stando alla (58) questo comporta che

$$\bar{h}_1^3 = \bar{h}_2^3 = \bar{h}_3^3 = \bar{h}_0^0 = 0. \quad (60)$$

La (59) e la (60) comportano che

$$\bar{h}_0^0 + \bar{h}_1^1 + \bar{h}_2^2 + \bar{h}_3^3 = \bar{h}_\mu^\mu = \bar{h} = 0;$$

ricordando che $\bar{h}_{\mu\nu} := h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} h$ possiamo scrivere

$$\bar{h}_\mu^\mu = \bar{h} = h - 2h = -h = 0 \Rightarrow \bar{h}_{\mu\nu} \equiv h_{\mu\nu},$$

ossia in questa gauge $\bar{h}_{\mu\nu}$ e $h_{\mu\nu}$ coincidono e sono a traccia nulla; poichè se $\bar{h}_\mu^\nu = 0$ allora anche $\bar{h}_{\mu\nu} = 0$ per cui possiamo, finalmente, scrivere la matrice che rappresenta la metrica perturbatrice

$$h_{\mu\nu}^{TT} = A_{\mu\nu} e^{ik_3 x^3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_{11} & h_{12} & 0 \\ 0 & h_{21} & -h_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (61)$$

Della (61) bisognerà poi prendere la parte reale o la parte immaginaria. Se l'onda si propagasse nelle direzioni y o x la matrice perturbatrice sarebbe molto simile ma gli elementi diversi da zero non sarebbero gli stessi del caso della (61). Generalmente le componenti sulla diagonale vengono indicate con A_+ mentre quelle fuori diagonale con A_\times ; esse rappresentano le due polarizzazioni indipendenti dell'onda gravitazionale. Se compare una sola delle due polarizzazioni l'onda è detta linearmente polarizzata.

La gauge che abbiamo usato per derivare questi risultati prevede la gauge armonica più l'utilizzo della gauge residua in cui sia verificata la condizione $\square_C \epsilon^\mu = 0$ per preservare la gauge armonica; una tale scelta della gauge si chiama gauge TT (trasverse-traceless) perchè rende la metrica perturbatrice che descrive l'onda a traccia nulla e rende non nulle solo le componenti trasverse alla direzione di propagazione. A questo punto possiamo fare un analogia con la teoria elettromagnetica: nel caso delle onde elettromagnetiche la libertà di gauge riduce i gradi di libertà dell'onda da 4 a 2 (una scelta appropriata della gauge, la gauge di radiazione, rende manifesto che sono possibili solo polarizzazioni trasverse alla direzione di propagazione), nel caso delle onde gravitazionali la libertà di gauge riduce i gradi di libertà dell'onda da 10 a 2 (anche qui una scelta appropriata della gauge, la gauge detta TT, rende manifesto che sono possibili solo polarizzazioni trasverse alla direzione di propagazione e che la metrica che la descrive è a traccia nulla). E' doveroso far notare che però le due teorie, come le due onde, sono profondamente diverse:

- La teoria delle onde elettromagnetiche è lineare quando si studiano nel vuoto mentre le equazioni di campo sono sempre non lineari e per derivare i risultati ottenuti abbiamo dovuto linearizzarle nella perturbazione della metrica, supposta di molto minore di 1, portata dall'onda gravitazionale;
- Le onde elettromagnetiche sono frutto del continuo trasferimento mutuale di energia dal campo elettrico al campo magnetico e sono descritte da un vettore mentre le onde gravitazionali sono il contrarsi e rilassarsi del tessuto stesso dell'universo e sono descritte da un tensore a due indici.

Le ultime brevi considerazioni riguardano la formazione e l'osservazione delle onde gravitazionali. Per poter generare un'onda gravitazionale è necessaria una distribuzione di masse asimmetrica che cambi nel tempo e che abbia momento di quadrupolo non nullo e dipendente dal tempo. La soluzione delle onde gravitazionali all'interno del sistema sorgente mostra, come contributo dominante, un andamento proporzionale nella derivata temporale del momento di quadrupolo, questo perchè la derivata temporale del momento di dipolo per una distribuzione di masse isolate è identicamente nullo per via della conservazione del momento angolare (cosa che non accade per le onde elettromagnetiche e questo spiega anche perchè quest'ultime siano decisamente più intense). Tipici sistemi sorgente sono i sistemi di stelle binarie molto massive, sistemi astrofisici coalescenti, stelle compatte rotanti in modo asimmetrico o esplosioni di supernovae. Per quanto riguarda l'osservazione va detto che le onde gravitazionali sono molto deboli (valori tipici di ampiezza di onde prodotte da sorgenti astrofisiche si aggirano tra $10^{-(24\div 21)}$) per cui osservarle è complicato, tanto che le prime osservazioni sono, da parte degli interferometri LIGO e VIRGO, nel 2015. Questi interferometri si servono dell'interferometria LASER e misurano il tempo di percorrenza, in due bracci ortogonali di egual lunghezza, di fasci di fotoni; al passaggio di un'onda gravitazionale uno dei bracci si contrae e l'altro si espande, il che porta ad una differenza nel tempo di cammino dei due fasci nei due bracci. La nuova generazione di interferometri gravitazionali, sempre basati sull'interferometria LASER, prenderà piede nel prossimo futuro (nel 2034) con l'interferometro eLISA: si tratta di un interferometro spaziale in cui 3 satelliti situati a circa 1 milione di chilometri l'uno dall'altro saranno disposti a triangolo equilatero (per avere le stesse distanze). Questa nuova generazione di interferometri gravitazionali dovrebbe fornire misurazioni molto più precise e riuscire a vedere onde gravitazionali che oggi è impossibile rivelare.

28 Discutere le conseguenze dell'equazione della deviazione geodetica su un sistema di particelle in presenza di un'onda gravitazionale piana del tipo $h_{\mu\nu}^{TT} = \text{diag}(0, 0, h_{yy}, h_{zz})$ con $h_{yy}^{TT} = -h_{zz}^{TT} = 2A_+ \cos(\omega(t - \frac{x}{c}))$. Si ricordi che $R_{iklm} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 h_{im}}{\partial x^k \partial x^l} + \frac{\partial^2 h_{kl}}{\partial x^i \partial x^m} - \frac{\partial^2 h_{il}}{\partial x^k \partial x^m} - \frac{\partial^2 h_{km}}{\partial x^i \partial x^l} \right) + O(h_{\mu\nu}^2)$

Vogliamo studiare l'effetto del passaggio di un'onda gravitazionale, posta nella gauge TT, su una particella e su un sistema di particelle. Cominciamo con il caso di una particella, essa seguirà le geodetiche generate dal passaggio dell'onda metrica

$$\frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} + \Gamma_{k\mu}^\alpha \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^k}{d\tau} = 0 \Rightarrow \frac{dU^\alpha}{d\tau} + \Gamma_{k\mu}^\alpha U^k U^\mu = 0;$$

la particella a $t = 0$ sarà a riposo e quindi l'accelerazione impressa all'istante $t = 0$ sarà data da (dato che la particella è a riposo si ha $U^\alpha = (1, 0, 0, 0)$)

$$\left. \frac{dU^\alpha}{d\tau} \right|_{t=0} = -\Gamma_{00}^\alpha = 0.$$

L'accelerazione è nulla perchè il simbolo di Christoffel contiene solo termini della metrica perturbatrice che nella gauge TT sono identicamente nulli (contiene termini in cui almeno uno dei due indici è 0). La particella soggetta all'onda gravitazionale manterrà la sua posizione costante ed è quindi impossibile studiare le onde gravitazionali con una sola particella. Il fatto che le coordinate spaziali della particella rimangano costanti è fisicamente intuibile dato che l'onda metrica contrae e espande lo spazio stesso.

Veniamo al caso di due particelle: per studiare questo caso l'idea è quella di utilizzare l'equazione della deviazione geodetica per poter capire il comportamento della distanza relativa tra le particelle in esame. Costruiamo un LIF centrato sulla geodetica di una delle due particelle; in questo riferimento, la particella sulla cui geodetica è centrato il LIF avrà coordinate spaziali nulle (il LIF è centrato esattamente sulla particella) ed inoltre le derivate covarianti si ridurranno alle derivate ordinarie. Valutiamo l'equazione della deviazione geodetica (che ci dà l'accelerazione relativa tra le due particelle) mettendoci nel LIF appena citato

$$(\nabla_t(\nabla_t \delta x))^\alpha = \frac{\partial x^\mu}{\partial \tau} \left(\frac{\partial x^\nu}{\partial \tau} \delta x_{;\nu}^\alpha \right)_{;\mu} = R_{\mu\nu\beta}^\alpha t^\mu t^\nu \delta x^\beta = R_{\mu\nu\beta}^\alpha \frac{\partial x^\mu}{\partial \tau} \frac{\partial x^\nu}{\partial \tau} \delta x^\beta \Rightarrow \delta x_{,00}^\alpha = R_{00\beta}^\alpha \delta x^\beta \Rightarrow \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \delta x^\alpha}{\partial t^2} = R_{00\beta}^\alpha \delta x^\beta. \quad (62)$$

A questo punto, consideriamo il tensore di Riemann (da ora in poi si utilizzeranno gli indici latini che corrono da 1 a 3 dato che ci interessa la separazione spaziale delle due geodetiche)

$$R_{iklm} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 h_{im}}{\partial x^k \partial x^l} + \frac{\partial^2 h_{kl}}{\partial x^i \partial x^m} - \frac{\partial^2 h_{il}}{\partial x^k \partial x^m} - \frac{\partial^2 h_{km}}{\partial x^i \partial x^l} \right) + O(h_{\mu\nu}^2),$$

di tutte le sue componenti, a noi interessano solo quelle della forma $R_{00j}^i = g^{ik} R_{k00j}$, ossia (ricordando che nella gauge TT le componenti della metrica perturbatrice con almeno un indice uguale a zero sono nulle) abbiamo

$$R_{00j}^i = g^{ik} R_{k00j} = \frac{1}{2} g^{ik} \left(\frac{\partial^2 h_{kj}}{\partial x^0 \partial x^0} + \frac{\partial^2 h_{00}}{\partial x^k \partial x^j} - \frac{\partial^2 h_{k0}}{\partial x^0 \partial x^j} - \frac{\partial^2 h_{0j}}{\partial x^k \partial x^0} \right) = \frac{1}{2} g^{ik} \left(\frac{\partial^2 h_{kj}}{\partial x^0 \partial x^0} \right) = \frac{1}{2c^2} g^{ik} \left(\frac{\partial^2 h_{kj}}{\partial t^2} \right);$$

sostituendo quanto trovato nella parte spaziale dell'equazione (62) otteniamo

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \delta x^i}{\partial t^2} = \frac{1}{2c^2} g^{ik} \left(\frac{\partial^2 h_{kj}}{\partial t^2} \right) \delta x^j \Rightarrow \frac{\partial^2 \delta x^i}{\partial t^2} = \frac{1}{2} g^{ik} \left(\frac{\partial^2 h_{kj}}{\partial t^2} \right) \delta x^j. \quad (63)$$

La variazione nel tempo della quantità δx^l si può scrivere come

$$\delta x^l = \delta x_0^l + \delta x_1^l,$$

in cui δx_0^l è la quantità costante di cui sono distanziate le due geodetiche prima del passaggio dell'onda e δx_1^l è una piccola quantità (piccola nel senso di confrontabile con l'entità della perturbazione ondosa) che rappresenta la variazione (dipendente dal tempo) della distanza tra le geodetiche quando è presente l'onda gravitazionale; inserendo questa scrittura di δx^l nella (63)

$$\frac{\partial^2 (\delta x_0^i + \delta x_1^i)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \delta x_1^i}{\partial t^2} = \frac{1}{2} (\eta^{ik} - h^{ik}) \left(\frac{\partial^2 h_{kj}}{\partial t^2} \right) (\delta x_0^j + \delta x_1^j) = \frac{1}{2} \eta^{ik} \left(\frac{\partial^2 h_{kj}}{\partial t^2} \right) \delta x_0^j,$$

in cui abbiamo tenuto solo quantità al primo ordine nella perturbazione; l'equazione appena scritta si integra immediatamente e restituisce la quantità δx_1^l , per cui possiamo scrivere

$$\delta x^i = \delta x_0^i + \frac{1}{2} \eta^{ik} h_{kj} \delta x_0^j. \quad (64)$$

Dalla (64) possiamo calcolare la distanza relativa tra le due geodetiche delle due particelle; sottraendola e ricordando di essere nella gauge TT, che la metrica di Minkowski è diagonale e che nel nostro caso sono non nulle solo le componenti h_{yy} e $-h_{zz}$ (e che l'onda si propaga nella direzione dell'asse x) otteniamo

$$\begin{aligned} \delta x^x &= \delta x_0^x + \frac{1}{2} \eta^{xx} h_{xx} \delta x_0^x = \delta x_0^x; \\ \delta x^y &= \delta x_0^y + \frac{1}{2} \eta^{yy} h_{yy} \delta x_0^y = \delta x_0^y + \frac{1}{2} h_{yy} \delta x_0^y; \\ \delta x^z &= \delta x_0^z + \frac{1}{2} \eta^{zz} h_{zz} \delta x_0^z = \delta x_0^z + \frac{1}{2} h_{zz} \delta x_0^z; \end{aligned} \quad (65)$$

come è evidente dalle (65) la perturbazione ha carattere trasverso dato che dalla prima la separazione lungo l'asse di propagazione rimane costante. Va inoltre notato che la quantità δx^i è calcolata nel LIF solidale con una delle particelle, per cui essa descrive sostanzialmente le coordinate dell'altra particella. Immaginiamo che le due particelle siano inizialmente poste in $(\delta x_0^x = 0, \delta x_0^y = y_0, \delta x_0^z = 0)$ e $(\delta x_0^x = 0, \delta x_0^y = 0, \delta x_0^z = z_0)$; utilizzando il fatto che $h_{\mu\nu}^{TT} = \text{diag}(0, 0, h_{yy}, h_{zz})$ con $h_{yy} = -h_{zz} = 2A_+ \cos(\omega(t - \frac{x}{c}))$ le (65) ci dicono che per la particella inizialmente posta in $(\delta x_0^x = 0, \delta x_0^y = y_0, \delta x_0^z = 0)$

$$\begin{aligned} \delta x^x &= 0; \\ \delta x^y &= y_0 \left(1 + A_+ \cos \left(\omega \left(t - \frac{x}{c} \right) \right) \right); \\ \delta x^z &= 0, \end{aligned}$$

mentre per la seconda particella (quella inizialmente posta in $(\delta x_0^x = 0, \delta x_0^y = 0, \delta x_0^z = z_0)$)

$$\begin{aligned} \delta x^x &= 0; \\ \delta x^y &= 0; \\ \delta x^z &= z_0 \left(1 - A_+ \cos \left(\omega \left(t - \frac{x}{c} \right) \right) \right). \end{aligned}$$

Le due particelle oscillano lungo gli assi in cui erano inizialmente poste. Se avessimo un anello, quello che succederebbe è che i punti dell'anello che sono posti inizialmente (ossia in assenza di perturbazione ondosa) sugli assi, seguirebbero il moto appena descritto (il caso di due particelle) mentre tutti gli altri punti dell'anello seguirebbero un moto che è la composizione dei moti singoli dei punto posti sugli assi e l'anello si passerebbe periodicamente da forma circolare ad ellittica.

29 Discutere le conseguenze dell'equazione della deviazione geodetica su un sistema di particelle in presenza di un'onda gravitazionale piana del tipo in cui solo le componenti h_{yz} e h_{zy} sono non nulle con $h_{yz}^{TT} = h_{zy}^{TT} = 2A_{\times} \cos(\omega(t - \frac{x}{c}))$. Si ricordi che $R_{iklm} = \frac{1}{2}(\frac{\partial^2 h_{im}}{\partial x^k \partial x^l} + \frac{\partial^2 h_{kl}}{\partial x^i \partial x^m} - \frac{\partial^2 h_{il}}{\partial x^k \partial x^m} - \frac{\partial^2 h_{km}}{\partial x^i \partial x^l}) + O(h_{\mu\nu}^2)$

La trattazione preliminare fino alla formula (64), che riportiamo

$$\delta x^i = \delta x_0^i + \frac{1}{2} \eta^{ik} h_{kj} \delta x_0^j,$$

è identica al caso precedente. Ciò che cambia sono le equazioni (65) che in questo caso, dato che le uniche componenti non nulle della metrica perturbatrice sono h_{yz} e h_{zy} , diventano

$$\begin{aligned} \delta x^x &= \delta_0 x^x + \frac{1}{2} \eta^{xx} h_{xj} \delta x_0^j = \delta x_0^x; \\ \delta x^y &= \delta_0 x^y + \frac{1}{2} \eta^{yy} h_{yz} \delta x_0^z = \delta_0 x^y + \frac{1}{2} h_{yz} \delta x_0^z; \\ \delta x^z &= \delta_0 x^z + \frac{1}{2} \eta^{zz} h_{zy} \delta x_0^y = \delta_0 x^z + \frac{1}{2} h_{zy} \delta x_0^y; \end{aligned} \quad (66)$$

anche in questo caso, ovviamente, come è evidente dalle (66) la perturbazione ha carattere trasverso dato che, dalla prima delle (66), la separazione lungo l'asse di propagazione rimane costante. Come in precedenza, notiamo che la quantità δx^i è calcolata nel LIF solidale con una delle particelle, per cui essa descrive sostanzialmente le coordinate dell'altra particella. Immaginiamo che le due particelle siano inizialmente poste in $(\delta x_0^x = 0, \delta x_0^y = y_0, \delta x_0^z = 0)$ e $(\delta x_0^x = 0, \delta x_0^y = 0, \delta x_0^z = z_0)$; utilizzando il fatto che $h_{yz} = h_{zy} = 2A_{\times} \cos(\omega(t - \frac{x}{c}))$ le (66) ci dicono che per la particella inizialmente posta in $(\delta x_0^x = 0, \delta x_0^y = y_0, \delta x_0^z = 0)$

$$\begin{aligned} \delta x^x &= 0; \\ \delta x^y &= y_0; \\ \delta x^z &= z_0 A_{\times} \cos\left(\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)\right), \end{aligned}$$

mentre per la seconda particella (quella inizialmente posta in $(\delta x_0^x = 0, \delta x_0^y = 0, \delta x_0^z = z_0)$)

$$\begin{aligned} \delta x^x &= 0; \\ \delta x^y &= y_0 A_{\times} \cos\left(\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)\right); \\ \delta x^z &= z_0. \end{aligned}$$

Le due particelle oscillano lungo direzioni ortogonali agli assi in cui erano inizialmente poste. Se avessimo un anello, quello che succederebbe è che i punti dell'anello che sono posti inizialmente (ossia in assenza di perturbazione ondosa) sugli assi, seguirebbero il moto appena descritto del caso di due particelle mentre gli tutti gli altri punti dell'anello seguirebbero un moto che è la composizione dei moti singoli dei punto posti sugli assi e l'anello si passerebbe periodicamente da forma circolare ad ellittica ma ruotata di 45° rispetto all'ellisse del caso precedente.