



SAPIENZA  
UNIVERSITÀ DI ROMA

# Teoria di stringa classica relativistica e sua applicazione nello spazio di De Sitter

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali  
Corso di Laurea in Fisica

Candidato  
Federico Manzoni  
Matricola 1759892

Relatore  
Professor Guido Martinelli

Anno Accademico 2018/2019

---

**Teoria di stringa classica relativistica e sua applicazione nello spazio di De Sitter**  
Tesi di Laurea. Sapienza – Università di Roma

© 2019 Federico Manzoni. Tutti i diritti riservati

Questa tesi è stata composta con  $\text{\LaTeX}$  e la classe Sapthesis.

Versione: 22 febbraio 2022

Email dell'autore: federico13.manzoni97@gmail.com

*A nonna, che avrebbe voluto vedermi laureato.*



# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>vii</b>
0.1 La teoria delle stringhe . . . . .	vii
0.2 Sviluppi, applicazioni e modalità di verifica . . . . .	viii
<b>1 Le dimensioni extra</b>	<b>1</b>
1.1 Compattificazione dimensionale . . . . .	1
1.2 Relazione tra gravitazione e compattificazione . . . . .	2
1.2.1 La costante gravitazionale . . . . .	3
1.2.2 Lunghezza di Planck in varie dimensioni . . . . .	3
1.2.3 Volume delle dimensioni compattificate . . . . .	4
1.3 Buca di potenziale con dimensioni extra . . . . .	5
<b>2 Particella puntiforme relativistica</b>	<b>9</b>
<b>3 Stringa classica relativistica</b>	<b>11</b>
3.1 Funzionale di area per superfici nello spazio di Minkowski e azione di Nambu-Goto . . . . .	12
3.2 Equazioni del moto, gauge statica e condizioni al contorno . . . . .	14
<b>4 Prime applicazioni</b>	<b>17</b>
4.1 Energia e tensione di una stringa allungata . . . . .	17
4.2 Applicazione nello spazio di De Sitter . . . . .	18
4.2.1 Introduzione allo spazio di De Sitter . . . . .	18
4.2.2 Stringa circolare nello spazio di De Sitter . . . . .	21
<b>5 Conclusioni</b>	<b>25</b>
<b>A Richiami di relatività ristretta</b>	<b>27</b>
<b>B La delta di Dirac</b>	<b>29</b>
<b>C Funzionale di area per superfici nello spazio euclideo</b>	<b>31</b>
<b>Bibliografia</b>	<b>33</b>



# Introduzione

Fin dalla nascita della fisica moderna la via seguita è stata quella della ricerca di una teoria unificatrice che potesse descrivere e prevedere correttamente i fenomeni che ci circondano, inquadrandoli in un unico scenario in cui lavorare, una teoria del tutto. La prima "unificazione" è stata opera degli studi di James Clerk Maxwell, in grado di comprendere che la teoria elettrica e magnetica sono due facce della stessa medaglia; la teoria elettromagnetica da lui formalizzata era in grado di calcolare la velocità della luce e di prevedere le onde elettromagnetiche già nel 1864. In seguito altre grandi intuizioni hanno portato all'unificazione della teoria dell'elettrodinamica quantistica e della teoria debole nella teoria elettrodebole e, successivamente, di inquadrare in un unico modello, il Modello Standard delle particelle (MS), l'elettrodinamica quantistica e le forze nucleari debole e forte. All'interno di questo modello però manca una delle quattro forze fondamentali, la forza gravitazionale: infatti le teorie che compongono il Modello Standard sono teorie quantistiche di campo e fino ad ora non si è ancora riusciti a quantizzare coerentemente la gravità.

Abbiamo quindi un modello quantistico, il Modello Standard delle particelle, ed una teoria, la relatività generale, che non si riesce a quantizzare per via delle profonde differenze tra la relatività generale stessa e la teoria quantistica alla base del MS. Una tra queste è il fatto che la teoria della relatività generale descrive il campo gravitazionale in termini geometrici usando il concetto di curvatura dello spazio-tempo; come tale non è una teoria quantizzata, cioè non assegna al campo gravitazionale particelle mediatrici elementari, gli ipotetici gravitoni. Una quantizzazione semplicistica della gravità risulta incoerente e difficile per via del fatto che nella relatività generale non esiste uno sfondo spazio-temporale piatto e la geometria dello spazio-tempo è dinamica; d'altro canto nella teoria quantistica dei campi, come in quella classica, lo spazio-tempo di Minkowski è lo sfondo della teoria. In teoria delle stringhe lo scenario naturale in cui lavorare è lo spazio-tempo minkowskiano e pertanto tale teoria deve rispettare le richieste della relatività speciale di cui riportiamo in appendice alcuni richiami.

## 0.1 La teoria delle stringhe

Esistono varie teorie che cercano di quantizzare l'interazione gravitazionale; quella che recentemente sembra aver preso maggiormente piede è la teoria delle stringhe. Nel 1970 Nambu, Nielsen e Susskind tentarono di modellare la forza nucleare attraverso stringhe vibranti ad una sola dimensione, ma tale ipotesi era contraria alle osservazioni sperimentali; la teoria fu accantonata fino a quando fu dimostrato che nello spettro vibrazionale delle stringhe è presente una particella con le caratteristiche delle particelle mediatrici della forza gravitazionale. In definitiva la teoria delle stringhe asserisce quindi che i costituenti fondamentali sono oggetti a una dimensione (le stringhe), invece che a dimensione nulla come le particelle puntiformi e che le stringhe vibrando costituiscono uno spettro che contenga tutte le particelle.

La prima formulazione della teoria fu quella di stringa bosonica, la quale predice l'esistenza di soli bosoni; inoltre la teoria funziona in 26 dimensioni di cui una temporale. Formulazioni successive della teoria delle stringhe che comportino anche stati vibrazionali fermionici portano all'introduzione della supersimmetria ossia una simmetria secondo la quale ad ogni fermione e ad ogni bosone corrispondono rispettivamente un bosone e un fermione di uguale massa. Le teorie di superstringa riducono il numero di dimensioni extra da 26 a 10 (di cui solo una temporale), comunque maggiore delle 4 dimensioni comunemente osservate. E' pertanto necessario sviluppare un metodo per rendere queste dimensioni in esubero non osservabili: si suppone cioè che le dimensioni extra producano effetti fisici su un raggio così piccolo da non poter essere rilevate sperimentalmente, almeno per la tecnologia attuale.

Tale metodo è detto compattezza dimensionale e sarà oggetto di studio nel capitolo 1.

## 0.2 Sviluppi, applicazioni e modalità di verifica

La teoria delle stringhe è una grande area di ricerca con vari campi applicativi. Essa offre nuovi e utili punti di vista e strumenti in grado di migliorare la nostra comprensione delle teorie di gauge (alla base del MS) ed ha permesso anche di fare numerosi passi avanti nell'interpretazione mediante la meccanica statistica dei buchi neri. I lavori di Hawking e Bekenstein hanno mostrato che i buchi neri possiedono temperatura ed entropia, entrambe grandezze che necessitano di un'interpretazione statistica del sistema; questa interpretazione non nasce dalla teoria einsteiniana della gravità ed è a questo punto che interviene la teoria delle stringhe. Quest'ultima è molto utile anche nello studio dell'universo primordiale; con essa è possibile costruire un modello inflazionario più coerente rispetto ad altri ed inoltre sembrerebbe essere la teoria giusta per descrivere i primi istanti di vita dell'universo quando la relatività generale non è in grado di dare risposte. Nell'ultimo capitolo ci concentreremo prevalentemente su quest'ultima applicazione andando a studiare alcuni aspetti di una stringa circolare nello spazio di De Sitter.

La teoria delle stringhe pur avendo già numerose applicazioni è ancora in fase di sviluppo: uno dei problemi maggiori è che buona parte di essa è ancora formulata mediante l'utilizzo di metodi matematici perturbativi. Una conseguenza è che tali metodi comportano un così alto grado di approssimazione che la teoria non è in grado di descrivere un solo universo, ma qualcosa come  $10^{500}$  universi, ciascuno dei quali può avere diverse leggi fisiche e costanti. Ad oggi, la teoria delle stringhe non è verificabile in quanto l'uomo non possiede la tecnologia per osservare direttamente le stringhe (che dovrebbero avere dimensioni dell'ordine della lunghezza di Planck); alcune possibili vie in grado di dare verifiche indirette sulla teoria sono l'osservazione di partner supersimmetrici o l'osservazione di onde o lenti gravitazionali provenienti rispettivamente dallo stiramento di stringhe primordiali (in stringhe cosmiche) o dalle stringhe cosmiche stesse.



# Capitolo 1

## Le dimensioni extra

Nel capitolo introduttivo abbiamo visto che la teoria delle stringhe prevede un numero maggiore di dimensioni, ovvero delle dimensioni extra, oltre alle 3 spaziali e a quella temporale. Le dimensioni extra sono solo spaziali dato che lo spazio in cui si lavora è un'estensione dello spazio-tempo di Minkowski e pertanto viene generalizzato anche l'intervallo spazio-temporale infinitesimo al caso extra-dimensionale (o invarianza di Lorentz)

$$ds^2 = c^2 dt^2 - \sum_{i=1}^d dx_i^2, \quad (1.1)$$

in cui  $d$  è il numero di dimensioni spaziali.

In questo capitolo ci soffermeremo meglio su come si può ovviare all'inconveniente delle dimensioni extra e troveremo alcune relazioni che legano queste ultime alla costante gravitazionale e alla lunghezza di Planck.

### 1.1 Compattificazione dimensionale

In generale una dimensione ha due modi in cui può essere immaginata:

- Lunga e rettilinea, come quando si disegna un piano cartesiano;
- Compatta e circolare, come una circonferenza con raggio molto piccolo.

La compactificazione dimensionale è il modo con cui passare dalla prima visione alla seconda mediante l'utilizzo di identificazioni. Immaginiamo di prendere la retta reale (che in virtù del teorema di Heine-Borel è un insieme non compatto) ed applichiamo l'identificazione

$$x \equiv x + 2\pi R, \quad (1.2)$$

in cui  $R \in \mathcal{R}$ ; questo vuol dire che ogni volta che lungo la retta ci troviamo in  $x + 2\pi nR$ , con  $n \in \mathcal{Z}$  possiamo dire di essere nel punto di coordinata  $x$ . L'identificazione (1.2) comporta quindi che la retta reale si arrotola su se stessa formando una circonferenza che è ora un insieme compatto (da qui il termine "compactificazione").

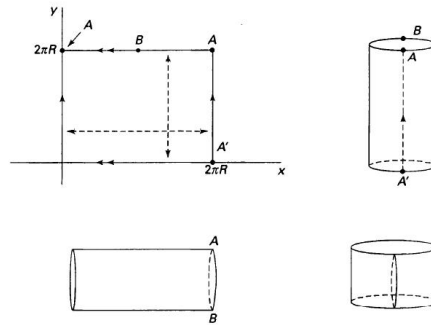
L'insieme delle  $x$  contenute tra 0 e  $2\pi R$  ( $0 \leq x < 2\pi R$ ) è detto dominio fondamentale e deve possedere le seguenti proprietà:

- Due differenti punti del dominio non devono essere identificati;
- Ogni punto dello spazio deve essere o all'interno del dominio fondamentale o identificabile con un punto interno del dominio.

In generale, per costruire lo spazio derivante dall'identificazione bisogna considerare il dominio fondamentale assieme al suo bordo e si implementa l'identificazione al bordo del dominio. Vediamo un esempio: consideriamo lo spazio bidimensionale ed imponiamo le identificazioni

$$\begin{aligned} x &\equiv x + 2\pi R; \\ y &\equiv y + 2\pi R, \end{aligned} \tag{1.3}$$

le quali ci dicono che tutti i punti  $x = 0$  sono identici ai punti  $x = 2\pi nR$ , con  $n \in \mathcal{Z}$ , (analogo per  $y$ ); il dominio fondamentale è dato da  $0 \leq x, y < 2\pi R$  ed assieme al suo bordo corrisponde al quadrato di lati  $x = 2\pi R$  e  $y = 2\pi R$ . Implementando le identificazioni (1.3) dobbiamo "incollare" la retta  $x = 0$  alla retta  $x = 2\pi R$  e analogamente per  $y$ ; quello che si ottiene è una superficie toroidale e l'ordine di applicazione delle identificazioni non fa altro che ruotare la superficie di  $\frac{\pi}{2}$ .



**Figura 1.1.** Implementazione delle identificazioni (1.3); la superficie risultante è un toro.

Nell'implementare un'identificazione può accadere che alcuni punti vadano in se stessi (punti fissi) e gli spazi con questa peculiarità sono detti "orbifolds" e corrispondono all'insieme delle classi di equivalenza di un dato spazio con punti fissi, in cui la relazione di equivalenza è data dall'identificazione; ne è un esempio la retta reale con l'identificazione  $x \equiv -x$ .

## 1.2 Relazione tra gravitazione e compattificazione

Le dimensioni extra devono essere compattificate in regioni di spazio molto ristretto di modo che la teoria risulti coerente con le osservazioni sperimentali che, con la tecnologia attuale, non hanno ancora rivelato l'esistenza di altre dimensioni. Cercheremo quindi di capire a cosa è legato il volume delle dimensioni compattificate; per fare questo bisogna ricavare alcune relazioni preliminari.

Per descrivere l'interazione gravitazionale la teoria più adeguata sarebbe la relatività generale, tuttavia per i nostri scopi è sufficiente l'utilizzo della teoria newtoniana (limite per basse velocità e campi deboli).

### 1.2.1 La costante gravitazionale

Ci domandiamo cosa accade alla costante  $G$  quando descriviamo la gravità in un altro numero di dimensioni; sappiamo che il campo gravitazionale può essere espresso come gradiente cambiato di segno di un certo potenziale (il potenziale gravitazionale)

$$[\vec{g}] = \frac{[forza]}{[M]} = \frac{[U_g]}{[L]} \Rightarrow [U_g] = \frac{[energia]}{[M]}, \quad (1.4)$$

dato che  $\nabla$  ha le dimensioni di  $\frac{1}{[L]}$ ; quanto detto dalla (1.4) è valido in qualunque numero di dimensioni. Il potenziale gravitazionale 4-dimensionale soddisfa l'equazione di Poisson

$$\nabla^2 U_{g,4} = 4\pi G_4 \rho_{m,4}. \quad (1.5)$$

Il primo membro ha le stesse unità di misura in qualunque numero di dimensioni mentre la densità di materia non mantiene le medesime unità; in un numero arbitrario di dimensioni la (1.5) deve essere modificata:

$$\nabla^2 U_{g,D} = 4\pi G_D \rho_{m,D}, \quad (1.6)$$

con  $D$  numero di dimensioni spazio-temporali ( $D = d + 1$ ,  $d$  dimensioni spaziali e una temporale). Quindi la costante di gravitazione cambia al variare del numero di dimensioni. L'equazione (1.6) definisce la gravitazione newtoniana in un numero generico di dimensioni.

### 1.2.2 Lunghezza di Planck in varie dimensioni

Nello studio della gravitazione è utile definire le unità di misura di Planck: in tale sistema si pongono  $G$ ,  $c$  e  $\hbar$  uguali ad 1 e dalle unità di misura delle tre costanti sopra riportate otteniamo le equazioni

$$G = \frac{l_P^3}{m_P t_P^2}; \quad c = \frac{l_P}{t_P}; \quad \hbar = \frac{m_P l_P^2}{t_P}. \quad (1.7)$$

Risolviendo ed inserendo i valori delle tre costanti nel sistema cgs si ottiene

$$\begin{aligned} l_P &= \sqrt{\frac{G\hbar}{c^3}} = 1,161 \cdot 10^{-33} \text{ cm}; \\ t_P &= \sqrt{\frac{G\hbar}{c^5}} = 5,391 \cdot 10^{-44} \text{ s}; \\ m_P &= \sqrt{\frac{c\hbar}{G}} = 2,176 \cdot 10^{-5} \text{ g}. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Esse rappresentano la scala in cui i fenomeni quantistici della gravità diventano importanti.

Quanto detto è valido solo in 4 dimensioni dato che la costante  $G$  viene ridefinita in spazi con dimensioni diverse. Poichè le unità del secondo membro della (1.6) devono essere uguali in tutte le dimensioni possiamo scrivere

$$[G_D][\rho_{m,D}] = [G_4][\rho_{m,4}] \Rightarrow [G_D] \frac{[M]}{[L^{D-1}]} = [G_4] \frac{[M]}{[L^3]} \Rightarrow [G_D] = [G_4][L^{D-4}]. \quad (1.9)$$

Dalla prima delle (1.8) e dalla (1.9) abbiamo

$$[G_4] = \frac{[c^3][L^2]}{[\hbar]} \Rightarrow [G_D] = \frac{[c^3][L^{D-2}]}{[\hbar]}, \quad (1.10)$$

dato che la lunghezza di Planck è definita a partire solo dalle costanti  $G$ ,  $c$  e  $\hbar$  possiamo sostituire  $L$  con la lunghezza di Planck in  $D$  dimensioni e scrivere

$$G_D = \frac{c^3 l_{P,D}^{D-2}}{\hbar} \Rightarrow l_{P,D}^{D-2} = \frac{\hbar G_D}{c^3}, \quad (1.11)$$

moltiplicando e dividendo per  $G_4$  e usando la prima delle (1.8) otteniamo finalmente

$$l_{P,D}^{D-2} = \frac{\hbar G_D}{c^3} \frac{G_4}{G_4} \Rightarrow l_{P,D}^{D-2} = l_{P,4}^2 \frac{G_D}{G_4}. \quad (1.12)$$

### 1.2.3 Volume delle dimensioni compatte

Immaginiamo uno spazio con  $d$  dimensioni spaziali e  $D$  dimensioni in totale e compattefichiamone  $d-3$  in circonferenze di raggio  $R$ ; posizioniamo una distribuzione uniforme di massa totale  $M$  nelle dimensioni compatteficate (quando compattefichiamo otteniamo una distribuzione posta in  $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ ) e ci chiediamo come sia fatto il potenziale  $U_{g,D}$  di questa distribuzione di massa. La densità di massa lungo le dimensioni  $x_1, x_2$  e  $x_3$ , in questo mondo  $D$ -dimensionale, è non nulla solo in  $x_1 = x_2 = x_3 = 0$  da cui

$$\rho_{m,D} = m\delta(x_1)\delta(x_2)\delta(x_3). \quad (1.13)$$

Integrando la (1.13) su tutto lo spazio otteniamo la massa totale

$$M = \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 dx_2 dx_3 \int_0^{2\pi R} \rho_{m,D} dx_4 \dots dx_d = m(2\pi R)^{d-3}, \quad (1.14)$$

in cui si è usata la proprietà fondamentale della delta (riportata in appendice sezione B).

Per un osservatore che vede il mondo in 4 dimensioni la massa in  $x_1 = x_2 = x_3 = 0$  è puntiforme per cui

$$\rho_{m,4} = M\delta(x_1)\delta(x_2)\delta(x_3) \Rightarrow \rho_{m,D} = \frac{\rho_{m,4}}{(2\pi R)^{d-3}}. \quad (1.15)$$

Inserendo quanto sopra nella (1.6) otteniamo

$$\nabla^2 U_{g,D} = 4\pi G_D \rho_{m,D} = 4\pi \rho_{m,4} \frac{G_D}{(2\pi R)^{d-3}}. \quad (1.16)$$

Poichè il potenziale gravitazionale  $U_{g,D}$  non dipende dalle dimensioni compatteficate (lungo queste dimensioni la distribuzione è uniforme) la (1.16) è a tutti gli effetti un'equazione di Poisson 4-dimensionale e pertanto si ha

$$G_4 = \frac{G_D}{(2\pi R)^{d-3}} \Rightarrow \frac{G_D}{G_4} = (2\pi R)^{D-4} = l_c^{D-4}, \quad (1.17)$$

dato che  $D = d+1 \Rightarrow d-3 = D-4$  e  $l_c$  è la lunghezza di una dimensione compatteficata. La (1.17) ci dice che il volume delle dimensioni compatteficate è dato dal rapporto tra la costante gravitazionale in  $D$  dimensioni e quella in 4; se le dimensioni compatteficate hanno raggi diversi si ottiene comunque lo stesso risultato, ossia

$$V_c = \frac{G_D}{G_4}. \quad (1.18)$$

Notiamo inoltre che inserendo la (1.17) nella (1.12) si ottiene  $l_{P,D}^{D-2} = l_{P,4}^2 l_c^{D-4}$  e, risolvendo per  $l_c$ :

$$l_c = \sqrt[D-4]{\frac{l_{P,D}^{D-2}}{l_{P,4}^2}}. \quad (1.19)$$

Al giorno d'oggi le scale che si riescono ad indagare con gli acceleratori sono dell'ordine di  $10^{-18}$  m; immaginando che la scala di Planck in un certo numero di dimensioni sia qualcosa di simile, ad esempio  $10^{-20}$  m allora usando la (1.19) nel caso di  $D = 10$  (teoria di superstringa) otterremmo una stima per  $l_c$  pari a

$$l_c = \sqrt[6]{\frac{10^{-160}m^8}{10^{-70}m^2}} \simeq 10^{-15}m. \quad (1.20)$$

Si auspica quindi che gli odierni acceleratori trovino prove dell'esistenza di dimensioni extra.

### 1.3 Buca di potenziale con dimensioni extra

Per spiegare l'importanza delle dimensioni extra e della compattificazione all'interno della teoria delle stringhe, vediamo cosa accade ad una particella soggetta ad una buca di potenziale con pareti infinite in uno spazio bidimensionale in cui una delle due dimensioni è compattificata. Il potenziale associato al sistema in esame, nel caso unidimensionale, è

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in (0, a) \\ \infty & \text{se } x \notin (0, a) \end{cases}, \quad (1.21)$$

il sistema ammette stati legati per tutte le energie  $V_{min} < E < V(x = \pm\infty)$  e quindi per tutte le energie comprese tra 0 e  $\infty$ . Per determinare lo spettro della particella confinata (senza dimensioni extra) dobbiamo risolvere l'equazione di Schrödinger indipendente dal tempo associata al potenziale (1.21). Nella regione compresa tra 0 ed  $L$  abbiamo

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = E\psi \Rightarrow \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = -k^2 \psi, \quad (1.22)$$

in cui  $k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$ ; per  $x \notin (0, a)$  il potenziale infinito implica che la funzione d'onda deve annullarsi fuori dalla buca.

La soluzione della (1.22) è data da

$$\psi(x) = A \cos(kx) + B \sin(kx). \quad (1.23)$$

Imponendo le condizioni al contorno (che  $\psi$  si annulli in 0 ed in  $a$ ) si ottiene che

$$\psi(0) = 0 = A \Rightarrow A = 0 \quad (1.24)$$

e

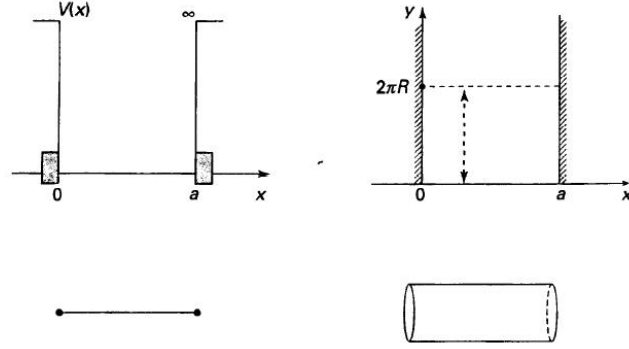
$$\psi(a) = B \sin(ka) = 0 \Rightarrow k = \frac{n\pi}{a}, \quad (1.25)$$

in cui  $n \in \mathcal{N} - \{0\}$  ed  $A = 0$  per via della (1.24). Eguagliando l'espressione per  $k^2$  data dalla (1.25) con la sua definizione,  $k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$ , otteniamo gli autovalori del sistema:

$$\frac{n^2 \pi^2}{a^2} = \frac{2mE}{\hbar^2} \Rightarrow E_n = \frac{\hbar^2 n^2 \pi^2}{2ma^2}. \quad (1.26)$$

Aggiungiamo ora una dimensione extra e compattifichiamola in una circonferenza di raggio  $R$  tramite l'identificazione  $(x, y) \equiv (x, y + 2\pi R)$ . Il moto della particella

avviene ora non più su un segmento ma all'interno di un cilindro, come visualizzato nella figura sottostante.



**Figura 1.2.** Moto nel caso bidimensionale con una una dimensione compattificata; il moto avviene all'interno di un cilindro di lunghezza  $a$  e raggio  $R$  e non più su un segmento.

L'equazione di Schrödinger associata è ora

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) = E\psi. \quad (1.27)$$

Cerchiamo una soluzione della forma  $\psi(x, y) = X(x)Y(y)$ ; inserendo nella (1.27) e massaggiando si ottiene

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{1}{X} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{1}{Y} \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} \right) = E, \quad (1.28)$$

i due termini sono separatamente costanti per cui otteniamo le due equazioni

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = E_x X; \quad -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} = E_y Y. \quad (1.29)$$

Il problema differenziale descritto dalla prima delle (1.29) è identico a quello della (1.22) e la soluzione è la stessa; la seconda delle (1.29) differisce per le condizioni al contorno, dettate dall'identificazione  $(x, y) \equiv (x, y + 2\pi R)$  e quindi deve essere  $Y(y) = Y(y + 2\pi R)$ :

$$C \cos(ky) + D \sin(ky) = C \cos(k(y + 2\pi R)) + D \sin(k(y + 2\pi R)), \quad (1.30)$$

usando le formule di somma per seno e coseno si trova che

$$\cos(2\pi kR) = 1; \quad \sin(2\pi kR) = 0 \Rightarrow k = \frac{j}{R}, \quad (1.31)$$

con  $j \in \mathcal{N}$ .

Si ottiene, in modo analogo al caso senza dimensione extra, lo spettro del sistema:

$$E_{n,j} = \frac{\hbar^2}{2m} \left[ \frac{n^2 \pi^2}{a^2} + \frac{j^2}{R^2} \right]. \quad (1.32)$$

La dimensione extra ha modificato lo spettro, ma questa modifica è accessibile solo per energie elevate. Per  $j = 0$  otteniamo lo stesso set di autovalori del caso senza la dimensione aggiunta ed inoltre i termini aggiuntivi,  $\frac{\hbar^2 j^2}{2mR^2}$ , compaiono solo quando sono confrontabili con l'altro termine, quindi

$$\frac{n^2 \pi^2}{a^2} = \frac{j^2}{R^2} \Rightarrow n = \frac{ja}{\pi R}, \quad (1.33)$$

---

essendo  $R \ll a$  essi si posizionano nella parte ad energia molto elevata dello spettro. In definitiva lo spettro risulta arricchito ed è proprio per questo che le dimensioni extra ricoprono un ruolo cruciale nella teoria delle stringhe: la stringa vibrando genera le particelle ma se potesse vibrare solo in 3 dimensioni spaziali il suo spettro non sarebbe abbastanza ampio da poter generare tutte le particelle.





## Capitolo 2

# Particella puntiforme relativistica

In questo capitolo, prendendo in esame una particella puntiforme non soggetta a forze, fisseremo i concetti fondamentali necessari per lo studio di una stringa classica relativistica: la costruzione di un'azione invariante, la sua indipendenza dalla parametrizzazione e le equazioni del moto ottenute dal principio variazionale di minima azione. I richiami di relatività necessari sono esposti in appendice (sezione A).

Per costruire un'azione che sia invariante questa deve dipendere da invarianti relativistici; il più semplice di questi è il tempo proprio che possiamo scrivere come  $d\tau = \frac{ds}{c}$ . L'integrale di  $\frac{ds}{c}$  lungo una world-line (ossia la traiettoria della particella nello spaziotempo) restituisce il tempo proprio trascorso su quel dato percorso. Quest'ultimo ha le dimensioni di un tempo per cui deve essere moltiplicato per un'energia per dare un'azione; la scelta ricade sull'energia a riposo della particella, ossia  $mc^2$ :

$$S = -mc \int_{\mathcal{P}} ds, \quad (2.1)$$

in cui  $\mathcal{P}$  indica una particolare world-line e il meno è necessario per restituire le corrette equazioni del moto nel limite classico. Ricordando la relazione (A.9) e che  $ds^2 = c^2 d\tau^2$  possiamo scrivere

$$S = -mc^2 \int_{t_i}^{t_f} dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}, \quad (2.2)$$

da cui, essendo l'azione l'integrale nel tempo della lagrangiana, possiamo scrivere  $L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = -\frac{mc^2}{\gamma}$ .

Per ottenere le equazioni del moto, secondo il principio di Hamilton, dobbiamo minimizzare l'azione: la particella percorrerà quindi la world-line più breve. Imponiamo che la sua variazione prima risulti nulla

$$\delta S = -mc \int_{\mathcal{P}} \delta(ds) = 0. \quad (2.3)$$

A tale scopo scegliamo una parametrizzazione della world-line,  $x^\mu = x^\mu(q)$  richiedendo che

$$x_i^\mu = x^\mu(q_i); \quad x_f^\mu = x^\mu(q_f). \quad (2.4)$$

Riscriviamo  $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$  come

$$ds^2 = g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dq} \frac{dx^\nu}{dq} dq^2, \quad (2.5)$$

che inserita nella (2.1) restituisce

$$S = -mc \int_{q_i}^{q_f} \sqrt{g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dq} \frac{dx^\nu}{dq}} dq. \quad (2.6)$$

La (2.6) è invariante per riparametrizzazione della world-line, infatti scegliendo un nuovo parametro,  $r$ , abbiamo che  $\frac{dx^\mu}{dq} = \frac{dx^\mu}{dr} \frac{dr}{dq}$  e quindi sostituendo in  $S$ :

$$S = -mc \int_{q_i}^{q_f} \sqrt{g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dr} \frac{dx^\nu}{dr} \frac{dr^2}{dq^2}} dq = -mc \int_{r_i}^{r_f} \sqrt{g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dr} \frac{dx^\nu}{dr}} dr. \quad (2.7)$$

Eseguiamo ora la variazione (2.3): il termine  $\delta(ds)$  si ricava dalla variazione della (2.5), infatti

$$2ds\delta(ds) = 2g_{\mu\nu} \delta\left(\frac{dx^\mu}{dq}\right) \frac{dx^\nu}{dq} dq^2 \Rightarrow \delta(ds) = \delta\left(\frac{dx^\mu}{dq}\right) \frac{dx_\mu}{ds} dq, \quad (2.8)$$

poichè la variazione di  $\frac{dx^\mu}{dq}$  e  $\frac{dx^\nu}{dq}$  restituisce lo stesso risultato e la metrica  $g_{\mu\nu}$  è stata adoperata per abbassare un indice. Inserendo il tutto nella (2.3), dato che  $mc \frac{dx_\mu}{ds} = p_\mu$ ,

$$\delta S = -mc \int_{q_i}^{q_f} \frac{d(\delta x^\mu)}{dq} \frac{dx_\mu}{ds} dq = - \int_{q_i}^{q_f} \frac{d(\delta x^\mu)}{dq} p_\mu dq = 0. \quad (2.9)$$

Possiamo riscrivere l'integrando della (2.9) come la derivata di  $\delta x^\mu p_\mu$ , dovendo elidere il termine aggiuntivo:

$$- \int_{q_i}^{q_f} \frac{d}{dq} (\delta x^\mu p_\mu) dq + \int_{q_i}^{q_f} \delta x^\mu \frac{dp_\mu}{dq} dq = 0. \quad (2.10)$$

Il primo termine restituisce  $\delta x^\mu p_\mu \Big|_{q_i}^{q_f}$  che è nullo perchè agli estremi della world-line le coordinate sono fissate dalle (2.4); il secondo termine, dovendo essere nullo per ogni  $\delta x^\mu(q)$  arbitrario, implica che:

$$\frac{dp_\mu}{dq} = 0. \quad (2.11)$$

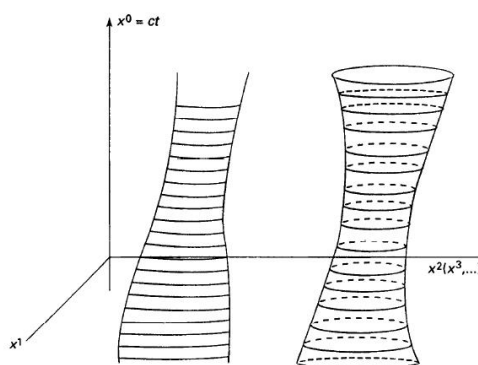
Le (2.11) rappresentano le equazioni del moto e ci dicono che il quadrimpulso della particella è conservato lungo le world-lines; essendo la zeresima componente proporzionale all'energia e le altre tre le componenti dell'impulso classico, le (2.11) affermano la conservazione dell'energia e dell'impulso durante il moto. L'azione (2.1) è invariante per riparametrizzazione e quindi lo sono anche le equazioni (2.11).

## Capitolo 3

# Stringa classica relativistica

Una particella nello spazio-tempo percorre una traiettoria che prende il nome di world-line; allo stesso modo una stringa disegna una superficie chiamata world-sheet e rappresentata in Figura 3.1. Nel capitolo precedente abbiamo visto che l'azione per una particella libera relativistica è proporzionale alla "lunghezza propria" della world-line percorsa ( $ds = cd\tau$ ); analogamente l'azione di una stringa relativistica sarà proporzionale all' "area propria" del world-sheet.

Partendo dal funzionale di area per superfici nello spazio di Minkowski e tramite considerazioni di carettore dimensionale arriveremo alla formulazione dell' azione di Nambu-Goto, la più semplice azione invariante per una stringa classica relativistica. Si fa presente che per sviluppi successivi della teoria (che non saranno trattati in questa sede) quali, ad esempio, la quantizzazione di una stringa relativistica è più conveniente (per via dei calcoli) utilizzare l'azione di Poljakov, totalmente equivalente all'azione di Nambu-Goto.



**Figura 3.1.** World-sheet disegnati da una stringa aperta (a sinistra) e da una stringa chiusa (a destra). Le superfici si estendono anche nella dimensione temporale e quindi non sono visualizzabili nella loro interezza.

Prima di tutto definiamo i due parametri con cui parametrizzare il world-sheet,  $\tau$  e  $\sigma$ , e la mappa che associa ogni punto  $(\tau, \sigma)$  ad un punto della superficie:

$$(\tau, \sigma) \longrightarrow (X^0(\tau, \sigma), \dots, X^d(\tau, \sigma)). \quad (3.1)$$

Le componenti  $X^0(\tau, \sigma), \dots, X^d(\tau, \sigma)$  rappresentano le coordinate della stringa parametrizzate mediante  $\tau$  e  $\sigma$ . La regolarità della mappa è garantita dalla richiesta

$$Rk \begin{bmatrix} \frac{\partial X^0}{\partial \tau} & \dots & \frac{\partial X^d}{\partial \tau} \\ \frac{\partial X^0}{\partial \sigma} & \dots & \frac{\partial X^d}{\partial \sigma} \end{bmatrix} = 2, \quad (3.2)$$

in cui  $Rk$  è il rango della matrice.

### 3.1 Funzionale di area per superfici nello spazio di Minkowski e azione di Nambu-Goto

Partendo dalla conoscenza del funzionale di area per superfici nello spazio euclideo (ricavato in appendice, sezione C) potremmo dire che l'area del world-sheet è data da

$$A = \int d\tau d\sigma \sqrt{\left(\frac{\partial X}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial X}{\partial \tau}\right) \left(\frac{\partial X}{\partial \sigma} \cdot \frac{\partial X}{\partial \sigma}\right) - \left(\frac{\partial X}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial X}{\partial \sigma}\right)^2}, \quad (3.3)$$

in cui il  $\cdot$  rappresenta il prodotto scalare pseudo-euclideo, quindi la positività del radicando non può essere dedotta dalla disuguaglianza di Schwarz.

Consideriamo un generico punto  $P$  e l'insieme dei vettori tangenti ad esso: questi vettori generano uno spazio vettoriale di dimensione 2 la cui base, sotto nostra richiesta, contiene un vettore di tipo spazio ed uno di tipo tempo; in ogni punto del world-sheet esiste quindi una direzione tangente di tipo spazio ed una di tipo tempo. La richiesta appena fatta trova fondamento fisico nel seguente ragionamento: per ogni piano a  $t$  fissato, l'intersezione con il world-sheet disegna la configurazione della stringa a quell'istante ed in ogni suo punto si può individuare il vettore tangente diretto lungo la curva che la stringa descrive, che è quindi di tipo spazio. Per quanto riguarda l'esistenza di vettori tangenti di tipo tempo, se questi non esistessero in qualche punto della stringa, e quindi del world-sheet, il suddetto punto non potrebbe muoversi essendo il moto lungo le direzioni di tipo spazio non fisico dato che richiederebbe velocità maggiori di  $c$ .

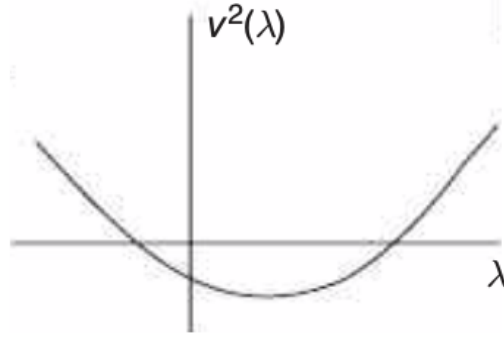
Qualunque vettore tangente ad un dato punto può essere scritto come

$$v^\mu(\lambda) = \frac{\partial X^\mu}{\partial \tau} + \lambda \frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma} \Rightarrow v^2(\lambda) = \left(\frac{\partial X}{\partial \tau}\right)^2 + \lambda^2 \left(\frac{\partial X}{\partial \sigma}\right)^2 + 2\lambda \frac{\partial X}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial X}{\partial \sigma}, \quad (3.4)$$

con  $\lambda \in (-\infty, \infty)$ . Essendo  $\frac{\partial X^\mu}{\partial \tau}$  e  $\frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma}$  linearmente indipendenti (segue dalla (3.2)), variando il parametro  $\lambda$  otteniamo tutti i vettori tangenti ad un generico punto. Poichè la (3.4) deve poter descrivere sia vettori di tipo tempo che di tipo spazio, deve esserci un valore del parametro  $\lambda$  per cui risulti  $v^2(\lambda = \tilde{\lambda}) = 0$ ;

$$\begin{aligned} v^2(\tilde{\lambda}) &= \left(\frac{\partial X}{\partial \tau}\right)^2 + \tilde{\lambda}^2 \left(\frac{\partial X}{\partial \sigma}\right)^2 + 2\tilde{\lambda} \frac{\partial X}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial X}{\partial \sigma} = 0 \Rightarrow \\ \Delta &= \left(\frac{\partial X}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial X}{\partial \sigma}\right)^2 - \left(\frac{\partial X}{\partial \sigma}\right)^2 \left(\frac{\partial X}{\partial \tau}\right)^2 > 0, \end{aligned} \quad (3.5)$$

in cui l'implicazione è dovuta al fatto che l'equazione  $v^2(\tilde{\lambda}) = 0$  deve avere due radici reali, come mostrato in Figura 3.2, e quindi il suo discriminante,  $\Delta$ , deve essere positivo.



**Figura 3.2.** Esempio di parabola disegnata dalla funzione di  $v^2(\lambda)$ , deve avere due radici reali per poter descrivere vettori di tipo tempo e di tipo spazio.

Il radicando nella (3.3) è quindi negativo; dobbiamo pertanto cambiarne il segno ottenendo per il funzionale d'area

$$A = \int d\tau d\sigma \sqrt{\left(\frac{\partial X}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial X}{\partial \sigma}\right)^2 - \left(\frac{\partial X}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial X}{\partial \tau}\right)\left(\frac{\partial X}{\partial \sigma} \cdot \frac{\partial X}{\partial \sigma}\right)}. \quad (3.6)$$

Le dimensioni fisiche dell'azione sono quelle di una lunghezza per un impulso,  $[S] = \frac{[L^2][M]}{[t]}$ ; per passare dall'area del world-sheet ad un'azione invariante si necessita di una quantità invariante con le dimensioni di una massa su un tempo. L'azione per una stringa classica relativistica è

$$S = -\frac{T_0}{c} \int d\tau \int d\sigma \sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - (\dot{X})^2 (X')^2}, \quad (3.7)$$

in cui  $T_0$  è la tensione della stringa,  $\dot{X} = \frac{\partial X}{\partial \tau}$  e  $X' = \frac{\partial X}{\partial \sigma}$ . La (3.7) è detta azione di Nambu-Goto.

Possiamo scrivere

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dX^\mu dX^\nu = g_{\mu\nu} \frac{\partial X^\mu}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial X^\nu}{\partial \xi^\beta} d\xi^\alpha d\xi^\beta, \quad (3.8)$$

in cui gli indici  $\alpha$  e  $\beta$  valgono 1 o 2 e  $\xi^1 = \tau$ ,  $\xi^2 = \sigma$ . Il termine  $\eta_{\alpha\beta} = g_{\mu\nu} \frac{\partial X^\mu}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial X^\nu}{\partial \xi^\beta} = \frac{\partial X}{\partial \xi^\alpha} \cdot \frac{\partial X}{\partial \xi^\beta}$  è la metrica indotta sul world-sheet dallo spazio-tempo in cui è immerso, ossia

$$\eta_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} (\dot{X})^2 & \dot{X} \cdot X' \\ X' \cdot \dot{X} & (X')^2 \end{bmatrix}. \quad (3.9)$$

Alla luce della (3.9) l'azione di Nambu-Goto è riscrivibile come

$$S = -\frac{T_0}{c} \int d\tau d\sigma \sqrt{-\eta}, \quad (3.10)$$

in cui  $\eta$  è il determinante della metrica indotta, ossia della matrice (3.9).

Una fondamentale simmetria dell'azione di Nambu-Goto sta nell'invarianza sotto trasformazioni di coordinate differenziabili che assicura la possibilità di scegliere la parametrizzazione più conveniente per la risoluzione delle equazioni del moto associate alla (3.10). Immaginiamo un cambio di parametrizzazione ottenuto tramite una funzione differenziabile

$$(\tau, \sigma) \longrightarrow (\tau', \sigma'). \quad (3.11)$$

Sotto la trasformazione l'elemento di area infinitesimo e la metrica si modificano:

$$\begin{aligned} d\tau d\sigma &= J d\tau' d\sigma'; \\ \eta &= (J^{-1})^2 \eta', \end{aligned} \quad (3.12)$$

in cui  $J$  è il determinante della matrice jacobiana della trasformazione e  $J^{-1}$  il determinante della sua inversa. In definitiva si ha

$$\int d\tau d\sigma \sqrt{-\eta} = \int J d\tau' d\sigma' J^{-1} \sqrt{-\eta'} = \int d\tau' d\sigma' \sqrt{-\eta'}. \quad (3.13)$$

### 3.2 Equazioni del moto, gauge statica e condizioni al contorno

Avendo determinato un'azione con le caratteristiche necessarie (che sia invariante di Lorentz e invariante per riparametrazioni) ci apprestiamo a ricavare le equazioni del moto dal principio di minima azione. Per cominciare riscriviamo l'azione in termini della densità di lagrangiana

$$S = \int d\tau d\sigma \mathcal{L}(\dot{X}^\mu, X'^\mu), \quad (3.14)$$

in cui  $\mathcal{L} = -\frac{T_0}{c} \sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - (\dot{X})^2 (X')^2}$ .

Variando l'azione (3.14) dobbiamo valutare la variazione della densità di lagrangiana, infatti

$$\delta S = \int d\tau d\sigma \delta(\mathcal{L}(\dot{X}^\mu, X'^\mu)) = \int d\tau d\sigma \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{X}^\mu} \frac{\partial(\delta X^\mu)}{\partial \tau} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X'^\mu} \frac{\partial(\delta X^\mu)}{\partial \sigma} \right], \quad (3.15)$$

e definiamo

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{X}^\mu} &= -\frac{T_0}{c} \frac{(\dot{X} \cdot X') X'_\mu - (X')^2 \dot{X}_\mu}{\sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - (\dot{X})^2 (X')^2}} \doteq \Omega_\mu; \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X'^\mu} &= -\frac{T_0}{c} \frac{(\dot{X} \cdot X') \dot{X}_\mu - (\dot{X})^2 X'_\mu}{\sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - (\dot{X})^2 (X')^2}} \doteq \Theta_\mu. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Esplicitando gli estremi di integrazione, scrivendo l'azione in termini delle derivate di  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{X}^\mu}(\delta X^\mu)$  rispetto a  $\tau$  e di  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X'^\mu}(\delta X^\mu)$  rispetto a  $\sigma$ , servendosi delle (3.16) ed imponendo la stazionarietà, si ottiene la variazione

$$\delta S = \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_0^{\sigma_s} d\sigma \left[ \frac{\partial}{\partial \tau} (\Omega_\mu \delta X^\mu) + \frac{\partial}{\partial \sigma} (\Theta_\mu \delta X^\mu) - \delta X^\mu \left( \frac{\partial \Omega_\mu}{\partial \tau} + \frac{\partial \Theta_\mu}{\partial \sigma} \right) \right] = 0. \quad (3.17)$$

Il primo termine è nullo; esso restituisce una quantità proporzionale a  $\delta X^\mu(\tau_i, \sigma)$  e  $\delta X^\mu(\tau_f, \sigma)$  ma potendo specificare lo stato iniziale e finale della stringa, e quindi le sue coordinate, le variazioni si annullano. Il secondo termine, può essere riscritto:

$$\int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_0^{\sigma_s} d\sigma \left[ \frac{\partial}{\partial \sigma} (\Theta_\mu \delta X^\mu) \right] = \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau [\Theta_\mu \delta X^\mu]_0^{\sigma_s}, \quad (3.18)$$

in cui  $\sigma_s$  è la lunghezza della stringa e sviluppando si ottiene

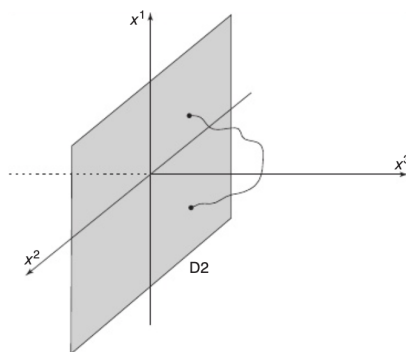
$$\begin{aligned} &\int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \left( \Theta_0(\tau, \sigma_s) \delta X^0(\tau, \sigma_s) - \Theta_0(\tau, 0) \delta X^0(\tau, 0) + \right. \\ &\left. + \dots + \Theta_d(\tau, \sigma_s) \delta X^d(\tau, \sigma_s) - \Theta_d(\tau, 0) \delta X^d(\tau, 0) \right). \end{aligned} \quad (3.19)$$

Per annullare il termine (3.19) abbiamo bisogno di numerose condizioni al contorno; per una stringa in uno spazio di  $d+1$  dimensioni servono  $2(d+1)$  condizioni al bordo. Tali condizioni possono essere applicate a  $\Theta_\mu$  o a  $\delta X^\mu$ :

- $\Theta_\mu(\tau, \sigma_b) = 0 \Rightarrow$  condizioni di Neumann;
- $\delta X_\mu(\tau, \sigma_b) = 0 \Rightarrow$  condizioni di Dirichlet.

essendo  $\sigma_b = 0$  o  $\sigma_b = \sigma_s$ .

Le prime non impongono nessuna restrizione a  $\delta X_\mu(\tau, \sigma_b)$  mentre le seconde richiedono che la variazione delle coordinate della stringa ai bordi sia nulla ossia che i punti estremali della stringa siano fissi durante il moto; poichè la coordinata  $X^0$  è legata al fluire del tempo le condizioni di Dirichlet non possono essere applicate a quest'ultima perchè altrimenti non ci sarebbe lo scorrere del tempo. Per poter esistere le condizioni al contorno di Dirichlet è necessario che la stringa sia ancorata a qualcosa di fisico: questo qualcosa prende il nome di  $D_p$ -brana, in cui la  $p$  è pari al numero di dimensioni spaziali della brana. La dimensionalità della brana, dipende dal numero,  $N$ , di coordinate vincolate dalle condizioni di Dirichlet e dal numero di dimensioni spaziali,  $d$ , dello spazio in cui si muove la stringa come  $p = d - N$ . Le  $D_p$ -brane sono oggetti fisici esistenti che emergono direttamente dalla dinamica della stringa.



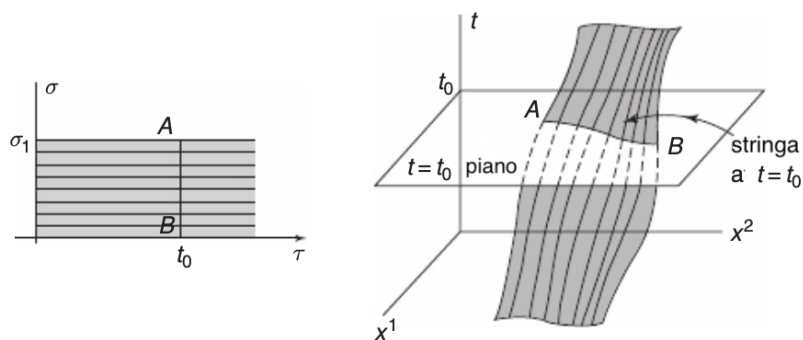
**Figura 3.3.**  $D_2$ -brana, la coordinata  $x^3$  è vincolata dalle condizioni di Dirichlet; la stringa può muoversi in qualunque direzione ma deve rimanere attaccata alla brana.

Il terzo termine della (3.17) deve essere nullo per ogni scelta arbitraria di  $\delta X^\mu$  e pertanto deve essere

$$\frac{\partial \Omega_\mu}{\partial \tau} + \frac{\partial \Theta_\mu}{\partial \sigma} = 0; \quad (3.20)$$

queste sono le equazioni del moto per una stringa classica relativistica. Dalle definizioni (3.16) si capisce come queste equazioni siano di difficile risoluzione; l'invarianza dell'azione per riparametrizzazione è in questo caso fondamentale, consentendoci di scegliere la parametrizzazione più adeguata e computazionalmente più economica. Una parametrizzazione particolarmente utile è chiamata gauge statica e consiste nel porre, per ogni punto del world-sheet,  $\tau = t$ . Le linee a  $\tau$  costante sono ora la stringa a istanti  $t$  successivi, come visualizzato in Figura 3.4.

Per quanto riguarda il parametro  $\sigma$ , potremmo scegliere che un bordo del world-sheet sia rappresentato, nello spazio di parametrizzazione, dalla retta  $\sigma = 0$  e l'altro bordo dalla retta  $\sigma = \sigma_1$ .



**Figura 3.4.** Rappresentazione della gauge statica per una stringa aperta, la stringa all'istante  $t = t_0$  è l'immagine della retta  $\tau = t_0$ .

Questa scelta di  $\sigma$  vale tanto per una stringa aperta quanto per una chiusa; l'unica differenza sta nel fatto che per una stringa chiusa lo spazio di parametrizzazione non può essere un piano ma deve essere un cilindro dato che il foglio di mondo descritto da questo tipo di stringa è topologicamente un cilindro (Figura 3.1).



## Capitolo 4

# Prime applicazioni

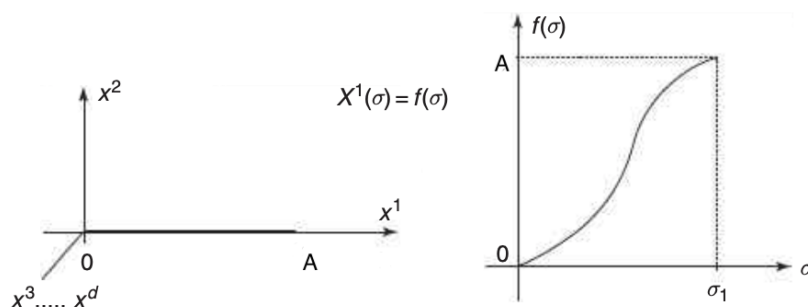
In quest'ultimo capitolo ci concentreremo su alcune applicazioni di quanto visto nel capitolo precedente; studieremo prima l'energia e la tensione di una stringa allungata e successivamente alcuni aspetti di una stringa circolare nello spazio di De Sitter, come la costruzione dell'azione di Nambu-Goto e l'identificazione della lagrangiana e del potenziale a cui è sottoposta la stringa.

### 4.1 Energia e tensione di una stringa allungata

Consideriamo una stringa di lunghezza  $A$ , fissata lungo  $x^1$  e quindi tale che

$$X^1(\sigma) = f(\sigma); \quad X^2 = \dots = X^d = 0; \quad (4.1)$$

Definiamo  $A = f(\sigma_1) - f(0)$  e per quanto riguarda la coordinata temporale adottiamo la gauge statica.



**Figura 4.1.** Stringa posta lungo l'asse  $x^1$  a sinistra. A destra, funzione  $f(\sigma)$  con cui è descritta la coordinata  $X^1$  della stringa, si ha  $f(0) = 0$  e  $f(\sigma_1) = A$ .

Il vettore che descrive la posizione della stringa è dato da  $X^\mu = (c\tau, f(\sigma), \vec{0})$ , in cui  $\vec{0}$  è il vettore nullo di dimensione  $d - 1$ ; calcolando  $X'^\mu$  e  $\dot{X}^\mu$  otteniamo

$$X'^\mu = (0, f(\sigma)', \vec{0}); \quad \dot{X}^\mu = (c, 0, \vec{0}), \quad (4.2)$$

ed otteniamo quindi per la metrica indotta (la matrice (3.9))

$$\eta_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} c^2 & 0 \\ 0 & -(f')^2 \end{bmatrix} \Rightarrow \eta = -c^2(f')^2. \quad (4.3)$$

L'azione di Nambu-Goto è data da

$$\begin{aligned} S &= -\frac{T_0}{c} \int dt d\sigma \sqrt{c^2(f')^2} = -T_0 \int_{t_i}^{t_f} \int_0^{\sigma_1} dt d\sigma \frac{\partial f}{\partial \sigma} = \\ &= - \int_{t_i}^{t_f} f(\sigma_1) - f(0) T_0 dt = - \int_{t_i}^{t_f} AT_0 dt, \end{aligned} \quad (4.4)$$

in cui  $t_i$  e  $t_f$  sono l'istante iniziale e finale del moto della stringa.

Ricordando che l'azione è l'integrale della lagrangiana nel tempo e notando che la stringa in esame non possiede energia cinetica possiamo identificare il potenziale a cui è soggetta:

$$L = -V \Rightarrow V = AT_0. \quad (4.5)$$

Essendo  $T_0$  la tensione della stringa, il termine  $AT_0$  rappresenta l'energia necessaria per creare una stringa di lunghezza  $A$  a partire da una stringa infinitesima. In questo processo di allungamento spendiamo del lavoro che viene immagazzinato nella stringa come massa (o energia a riposo) per cui l'energia per unità di lunghezza è data da

$$\mu_0 c^2 = \frac{V}{A} = T_0, \quad (4.6)$$

in cui  $\mu_0$  è la massa per unità di lunghezza. Si può dire che la stringa relativistica è di per sé priva di massa, ma che possiede una tensione che le conferisce della massa.

## 4.2 Applicazione nello spazio di De Sitter

Concentriamoci ora sull'applicazione nello spazio di De Sitter. L'azione di Nambu-Goto in uno spazio-tempo curvo è analoga alla (3.10) con la differenza che gli elementi della matrice (3.9) vanno calcolati tenendo conto della metrica dello spazio in cui si lavora. Prima di procedere introduciamo brevemente lo spazio di De Sitter.

### 4.2.1 Introduzione allo spazio di De Sitter

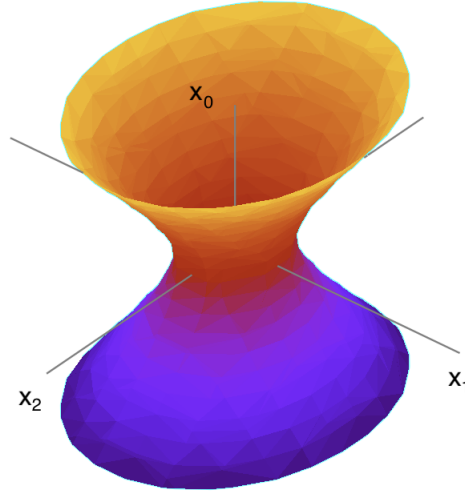
Lo spazio di De Sitter  $N$ -dimensionale è una varietà lorentziana analoga, nello spazio-tempo di Minkowski, ad una  $N$ -sfera nell'ordinario spazio euclideo. Tale spazio prende il nome dall'astronomo Willem De Sitter. Lo spazio di De Sitter può essere definito matematicamente come una sottovarietà  $N$ -dimensionale dello spazio di Minkowski  $(N + 1)$ -dimensionale: presa la metrica

$$ds^2 = \sum_{i=1}^{i=d} dx_i^2 - dx_0^2, \quad (4.7)$$

in cui  $d$  è il numero di dimensioni spaziali, lo spazio di De Sitter è la sottovarietà descritta da un iperboloide a una falda dato dal vincolo

$$k^2 = \sum_{i=1}^{i=d} x_i^2 - x_0^2. \quad (4.8)$$

Il vincolo (4.8) applicato in uno spazio  $(N + 1)$ -dimensionale riduce il numero di gradi di libertà e quindi la dimensione dello spazio descritto, che diventa  $N$ -dimensionale; nel caso in Figura 4.2 partendo da uno spazio-tempo a 4 dimensioni otteniamo uno spazio di De Sitter a 3 dimensioni.



**Figura 4.2.** Rappresentazione grafica tridimensionale dello spazio di De Sitter come iperboloide ad una falda nello spazio 4-dimensionale di Minkowski.

Essendo lo spazio di De Sitter una sottovarietà dello spazio di Minkowski, quest'ultimo induce sullo spazio di De Sitter una metrica che può essere determinata nel seguente modo: partendo da una parametrizzazione dello spazio di Minkowski soddisfacente il vincolo (4.8) si costruisce l'intervallo infinitesimo  $ds^2$  in termini dei parametri scelti e poichè  $ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$  si determina il tensore metrico cercato.

Una possibile parametrizzazione è data da:

$$\begin{aligned} x_0 &= k \sinh\left(\frac{t}{k}\right) + \frac{r^2 e^{\frac{t}{k}}}{2k}; \\ x_1 &= k \cosh\left(\frac{t}{k}\right) - \frac{r^2 e^{\frac{t}{k}}}{2k}; \\ x_j &= e^{\frac{t}{k}} y_j, \end{aligned} \quad (4.9)$$

in cui  $2 \leq j \leq d$ ,  $r^2 = \sum_j y_j^2$  e si è posto  $c = 1$ .

Verifichiamo che le (4.9) soddisfino il vincolo espresso dalla (4.8)

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^d x_i^2 - x_0^2 &= \left( k \cosh\left(\frac{t}{k}\right) - \frac{r^2 e^{\frac{t}{k}}}{2k} \right)^2 + \sum_j \left( e^{\frac{t}{k}} y_j \right)^2 + \\ &- \left( k \sinh\left(\frac{t}{k}\right) + \frac{r^2 e^{\frac{t}{k}}}{2k} \right)^2 = k^2 \cosh^2\left(\frac{t}{k}\right) + \frac{r^4 e^{\frac{2t}{k}}}{4k^2} - r^2 \cosh\left(\frac{t}{k}\right) e^{\frac{t}{k}} + \\ &+ \sum_j e^{\frac{2t}{k}} y_j^2 - k^2 \sinh^2\left(\frac{t}{k}\right) - \frac{r^4 e^{\frac{2t}{k}}}{4k^2} - r^2 \sinh\left(\frac{t}{k}\right) e^{\frac{t}{k}} = \\ &= k^2 - r^2 \cosh\left(\frac{t}{k}\right) e^{\frac{t}{k}} - r^2 \sinh\left(\frac{t}{k}\right) e^{\frac{t}{k}} + e^{\frac{2t}{k}} r^2 = \\ &= k^2 - r^2 e^{\frac{t}{k}} \left[ \frac{e^{\frac{t}{k}} + e^{-\frac{t}{k}}}{2} + \frac{e^{\frac{t}{k}} - e^{-\frac{t}{k}}}{2} - e^{\frac{t}{k}} \right] = \\ &= k^2, \end{aligned} \quad (4.10)$$

avendo adoperato la proprietà  $\cosh^2(q) - \sinh^2(q) = 1$  e le definizioni delle funzioni iperboliche.

A questo punto dobbiamo costruire l'intervallo infinitesimo  $ds^2 = \sum_{i=1}^{i=d} dx_i^2 - dx_0^2$ ; per farlo abbiamo bisogno di calcolare i differenziali di  $x_0, \dots, x_d$ , ossia

$$\begin{aligned} dx_0 &= \frac{re^{\frac{t}{k}}}{k} dr + \left( \cosh\left(\frac{t}{k}\right) + \frac{r^2 e^{\frac{t}{k}}}{2k^2} \right) dt; \\ dx_1 &= -\frac{re^{\frac{t}{k}}}{k} dr + \left( \sinh\left(\frac{t}{k}\right) - \frac{r^2 e^{\frac{t}{k}}}{2k^2} \right) dt; \\ dx_j &= \frac{e^{\frac{t}{k}}}{k} y_j dt + e^{\frac{t}{k}} dy_j, \end{aligned} \quad (4.11)$$

ed elevarli al quadrato

$$\begin{aligned} dx_0^2 &= \frac{r^2 e^{\frac{2t}{k}}}{k^2} dr^2 + \cosh^2\left(\frac{t}{k}\right) dt^2 + \frac{r^4 e^{\frac{2t}{k}}}{4k^2} dt^2 + 2\cosh\left(\frac{t}{k}\right) \frac{re^{\frac{t}{k}}}{k} dt dr + \\ &\quad + \frac{r^3 e^{\frac{2t}{k}}}{k^3} dt dr + \cosh\left(\frac{t}{k}\right) \frac{r^2 e^{\frac{t}{k}}}{k^2} dt^2; \\ dx_1^2 &= \frac{r^2 e^{\frac{2t}{k}}}{k^2} dr^2 + \sinh^2\left(\frac{t}{k}\right) dt^2 + \frac{r^4 e^{\frac{2t}{k}}}{4k^2} dt^2 - 2\sinh\left(\frac{t}{k}\right) \frac{re^{\frac{t}{k}}}{k} dt dr + \\ &\quad + \frac{r^3 e^{\frac{2t}{k}}}{k^3} dt dr - \sinh\left(\frac{t}{k}\right) \frac{r^2 e^{\frac{t}{k}}}{k^2} dt^2; \\ dx_j^2 &= \frac{y_j^2 e^{\frac{2t}{k}}}{k^2} dt^2 + e^{\frac{2t}{k}} dy_j^2 + 2\frac{y_j e^{\frac{2t}{k}}}{k} dt dy_j. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Inserendo le (4.12) nella (4.7), ricordando che  $r^2 = \sum_j y_j^2$  e quindi  $dr^2 = 2r dr = \sum_j dy_j^2 = 2 \sum_j y_j dy_j$ , si ottiene l'intervallo infinitesimo

$$\begin{aligned} ds^2 &= -dx_0^2 + dx_1^2 + \sum_{j=2}^{i=d} dx_j^2 = \\ &= -\cosh^2\left(\frac{t}{k}\right) dt^2 - 2\cosh\left(\frac{t}{k}\right) \frac{re^{\frac{t}{k}}}{k} dt dr - \cosh\left(\frac{t}{k}\right) \frac{r^2 e^{\frac{t}{k}}}{k^2} dt^2 + \\ &\quad + \sinh^2\left(\frac{t}{k}\right) dt^2 - 2\sinh\left(\frac{t}{k}\right) \frac{re^{\frac{t}{k}}}{k} dt dr - \sinh\left(\frac{t}{k}\right) \frac{r^2 e^{\frac{t}{k}}}{k^2} dt^2 + \\ &\quad + \sum_j \left( \frac{y_j^2 e^{\frac{2t}{k}}}{k^2} dt^2 + e^{\frac{2t}{k}} dy_j^2 + 2\frac{y_j e^{\frac{2t}{k}}}{k} dt dy_j \right) = \\ &= -dt^2 - dt^2 \frac{r^2 e^{\frac{t}{k}}}{k^2} \left[ \cosh\left(\frac{t}{k}\right) + \sinh\left(\frac{t}{k}\right) - e^{\frac{t}{k}} \right] + \\ &\quad - dr dt \frac{2re^{\frac{t}{k}}}{k} \left[ \cosh\left(\frac{t}{k}\right) + \sinh\left(\frac{t}{k}\right) - e^{\frac{t}{k}} \right] + e^{\frac{2t}{k}} dr^2 = \\ &= -dt^2 + e^{\frac{2t}{k}} dr^2 = -c^2 dt^2 + e^{\frac{2ct}{k}} dr^2. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Dalla (4.13) si ricava la metrica dello spazio di De Sitter

$$g_{00} = -1; \quad g_{11} = \dots = g_{dd} = e^{2Ht}, \quad (4.14)$$

in cui, poichè assumiamo un universo in espansione che sia omogeneo ed isotropo, si è posto  $\frac{c}{k} = H$  ossia alla costante di Hubble, il cui inverso è una stima dell'età dell'universo. Tale costante, non propriamente costante in quanto varia nel tempo, è data dal rapporto

$$H = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \Rightarrow H_0 = \frac{\dot{a}(t_0)}{a(t_0)} \approx 2,18 \cdot 10^{-18} \frac{1}{s} \Rightarrow T_U \approx 13,6 Gy, \quad (4.15)$$

in cui  $t_0$  è il tempo presente,  $T_U$  è l'età dell'universo e  $a(t)$  è detto fattore di scala. L'importanza del fattore di scala è notevole in un universo che deve sottostare al principio cosmologico secondo cui l'universo stesso è omogeneo ed isotropo su grandi scale (distanze maggiori di  $100Mpc \approx 3 \cdot 10^{21}km$ ); in un modello del genere, il fattore di scala al tempo  $t$  è proporzionale alla quantità per cui moltiplicare la distanza tra due punti generici dell'universo a due istanti di tempo diversi, ossia

$$\Delta x(t_1) = \frac{a(t_1)}{a(t_2)} \Delta x(t_2). \quad (4.16)$$

Da un punto di vista più fisico lo spazio di De Sitter è una soluzione cosmologica delle equazioni di campo di Einstein; si tratta di un modello d'universo che trascura la materia ordinaria in modo tale che la dinamica dell'universo sia dominata dalla costante cosmologica. Le attuali osservazioni dell'accelerazione dell'universo convergono su un modello di universo primordiale che, fino a circa  $10^{-33}$  secondi dopo il Big Bang, può essere descritto come un universo di De Sitter.

### 4.2.2 Stringa circolare nello spazio di De Sitter

Soffermiamoci sul caso di uno spazio di De Sitter a 4 dimensioni, la cui metrica, espressa dalla (4.14) con  $d = 3$ , è diagonale. Assumiamo la gauge statica e scriviamo il quadrivettore posizione della stringa come  $X^\mu = (ct, \vec{X}(t, \sigma))$ . Per trovare l'azione di Nambu-Goto per una stringa che si muove in questo spazio dobbiamo calcolare gli elementi della matrice (3.9) e quindi, preventivamente, le derivate di  $X^\mu$  rispetto a  $t$  e  $\sigma$ :

$$\begin{aligned} X'^\mu &= \frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma} = \left( 0, \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} \right); \\ \dot{X}^\mu &= \frac{\partial X^\mu}{\partial t} = \left( c, \frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \right). \end{aligned} \quad (4.17)$$

Dalle (4.17) possiamo costruire la matrice della metrica indotta (3.9)

$$\eta_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} -c^2 + e^{2Ht} \left( \frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \right) & e^{2Ht} \left( \frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} \right) \\ e^{2Ht} \left( \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \right) & e^{2Ht} \left( \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} \right) \end{bmatrix}, \quad (4.18)$$

il cui determinante è

$$\eta = \left( -c^2 + e^{2Ht} \left| \frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \right|^2 \right) \left( e^{2Ht} \left| \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} \right|^2 \right) - \left( e^{2Ht} \left( \frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} \right) \right)^2. \quad (4.19)$$

Inserendo la (4.19) nella (3.10) otteniamo l'azione di Nambu-Goto cercata

$$S = -\frac{T_0}{c} \int dt d\sigma \sqrt{- \left[ \left( -c^2 + e^{2Ht} \left| \frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \right|^2 \right) \left( e^{2Ht} \left| \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} \right|^2 \right) - \left( e^{2Ht} \left( \frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} \right) \right)^2 \right]}. \quad (4.20)$$

Consideriamo ora una stringa circolare posta nel piano  $(x^1, x^2)$  parametrizzabile come

$$\begin{aligned} X^1(t, \sigma) &= r(t) \cos(\sigma), \\ X^2(t, \sigma) &= r(t) \sin(\sigma), \\ X^3(t, \sigma) &= \dots = X^d(t, \sigma) = 0, \end{aligned} \quad (4.21)$$

con  $\sigma \in [0, 2\pi]$ . Con questo ansatz possiamo semplificare l'azione, infatti abbiamo:

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \right|^2 &= \dot{r}^2 \cos^2(\sigma) + \dot{r}^2 \sin^2(\sigma) = \dot{r}^2; \\ \left| \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} \right|^2 &= r^2 \sin^2(\sigma) + r^2 \cos^2(\sigma) = r^2; \\ \frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} &= -\dot{r} r \cos(\sigma) \sin(\sigma) + \dot{r} r \sin(\sigma) \cos(\sigma) = 0. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Con le (4.22) l'azione diventa

$$\begin{aligned} S &= -\frac{T_0}{c} \int_{t_i}^{t_f} dt \int_0^{2\pi} d\sigma \sqrt{-\left[(-c^2 + e^{2Ht}\dot{r}^2)e^{2Ht}r^2\right]} = \\ &= -\frac{T_0}{c} 2\pi e^{Ht} \int_{t_i}^{t_f} r \sqrt{c^2 - e^{2Ht}\dot{r}^2} dt, \end{aligned} \quad (4.23)$$

avendo integrato sulla variabile  $\sigma$ . Con una rapida analisi possiamo dedurre la correttezza dimensionale dell'espressione (4.23).

Identifichiamo a questo punto la lagrangiana del sistema

$$L = -\frac{T_0}{c} 2\pi e^{Ht} r(t) \sqrt{c^2 - e^{2Ht}\dot{r}(t)^2}. \quad (4.24)$$

Poichè nella metrica (4.14) è presente il fattore esponenziale che dipende dal tempo, il raggio effettivo misurabile della stringa è  $R(t) = e^{Ht}r(t)$ ; possiamo riscrivere la lagrangiana in termini di  $R(t)$  e  $\dot{R}(t) = He^{Ht}r(t) + \dot{r}(t)e^{Ht}$ . Nella lagrangiana (4.24) compaiono i termini

$$\begin{aligned} e^{Ht}r(t) &= R(t), \\ (e^{Ht}\dot{r}(t))^2 &= (\dot{R}(t) - He^{Ht}r(t))^2 = (\dot{R}(t) - HR(t))^2, \end{aligned} \quad (4.25)$$

da cui

$$L = -\frac{T_0}{c} 2\pi R(t) \sqrt{c^2 - (\dot{R}(t) - HR(t))^2}. \quad (4.26)$$

Dalla lagrangiana (4.26) possiamo ricavare la hamiltoniana del sistema: passando per la definizione della funzione di Hamilton dobbiamo calcolare il momento coniugato a  $\dot{R}(t)$ , ovvero

$$P_{\dot{R}} = \frac{\partial L}{\partial \dot{R}} = \frac{T_0}{c} 2\pi R(t) \frac{(\dot{R}(t) - HR(t))}{\sqrt{c^2 - (\dot{R}(t) - HR(t))^2}}, \quad (4.27)$$

grazie al quale possiamo scrivere

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(\dot{R}(t), R(t), t) &= P_{\dot{R}}\dot{R} - L = \\ &= \frac{T_0}{c} 2\pi R(t) \left[ \frac{\dot{R}(t)(\dot{R}(t) - HR(t))}{\sqrt{c^2 - (\dot{R}(t) - HR(t))^2}} + \sqrt{c^2 - (\dot{R}(t) - HR(t))^2} \right] = \\ &= \frac{T_0}{c} 2\pi R(t) \left[ \frac{\dot{R}(t)(\dot{R}(t) - HR(t)) + c^2 - (\dot{R}(t) - HR(t))^2}{\sqrt{c^2 - (\dot{R}(t) - HR(t))^2}} \right] = \\ &= \frac{T_0}{c} 2\pi R(t) \left[ \frac{c^2 + \dot{R}(t)HR(t) - H^2R^2(t)}{\sqrt{c^2 - (\dot{R}(t) - HR(t))^2}} \right]. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Notiamo che la hamiltoniana (4.28) dipende dal tempo attraverso la dipendenza delle variabili  $R(t)$  e  $\dot{R}(t)$  (e dalla dipendenza della costante di Hubble) e pertanto non dipende esplicitamente dal tempo. Essendo le parentesi di Poisson della hamiltoniana

con se stessa nulle, concludiamo che la (4.28) è una costante del moto della stringa.

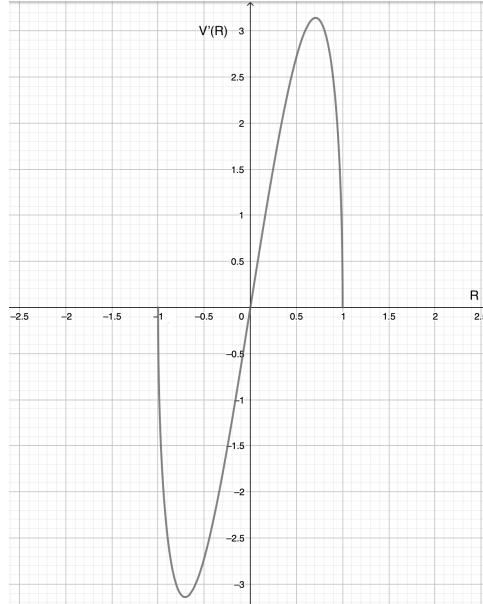
Immaginiamo ora una stringa per la quale la variazione del suo raggio effettivo nel tempo sia nulla,  $\dot{R}(t) = 0$ ; la lagrangiana e la hamiltoniana si riscrivono come

$$\begin{aligned} L &= -\frac{T_0}{c} 2\pi R \sqrt{c^2 - H^2 R^2}, \\ \mathcal{H} &= \frac{T_0}{c} 2\pi R \sqrt{c^2 - H^2 R^2}. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Non essendoci una parte cinetica nella prima delle (4.29) possiamo determinare immediatamente il potenziale a cui è soggetta questa stringa

$$V = -L = \mathcal{H} = \frac{T_0}{c} 2\pi R \sqrt{c^2 - H^2 R^2}, \quad (4.30)$$

definito matematicamente solo per  $c^2 - H^2 R^2 \geq 0 \Rightarrow -\frac{c}{H} \leq R \leq \frac{c}{H}$ . Essendo  $R$  il raggio della stringa, non può essere negativo e quindi il potenziale è fisicamente definito solo per  $R \in [0, \frac{c}{H}]$  come mostrato in Figura 4.3 in cui si è definito  $V'(R) = \frac{V(R)}{T_0}$  e si è posto  $c = H = 1$ .



**Figura 4.3.** Grafico del potenziale normalizzato alla tensione della stringa,  $V'(R) = \frac{V(R)}{T_0}$ , in unità arbitrarie tali che  $c = H = 1$ . La funzione presenta due punti stazionari,  $\tilde{R}_{\pm} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \approx \pm 0.707$ , in cui il potenziale assume il valore  $V'(\tilde{R}_{\pm}) = \pm \pi$ . La parte del grafico a  $R$  negativi non ha senso fisico.

Dal grafico in Figura 4.3 notiamo dei punti stazionari; derivando la (4.30) ed imponendo la stazionarietà otteniamo

$$\frac{\partial V'}{\partial R} = \frac{1}{T_0} \frac{\partial V}{\partial R} = \frac{2\pi}{c} \left[ \frac{c^2 - 2H^2 \tilde{R}^2}{\sqrt{c^2 - H^2 \tilde{R}^2}} \right] = 0 \Rightarrow \tilde{R}_{\pm} = \pm \frac{c}{\sqrt{2}H}, \quad (4.31)$$

di cui solo il valore positivo è accettabile. Il potenziale  $V'(R)$  calcolato in  $\tilde{R}_+$  assume il valore  $\pi \frac{c}{H}$  da cui

$$V(\tilde{R}_+) = T_0 \pi \frac{c}{H} \quad (4.32)$$

Come si vede anche dalla Figura 4.3, il punto  $(\tilde{R}_+, V'(\tilde{R}_+)) = (\frac{c}{\sqrt{2}H}, \pi \frac{c}{H})$  risulta un punto di massimo e quindi un punto instabile per la stringa statica.





## Capitolo 5

# Conclusioni

Lo scopo di questo lavoro è di offrire una panoramica introduttiva delle idee fondamentali della teoria delle stringhe e come questa viene formulata all'interno della relatività ristretta.

Si è partiti dalle dimensioni extra e dalla compattificazione dimensionale cercando di capirne il ruolo cruciale giocato nella teoria; si sono derivate le equazioni del moto e le condizioni al contorno per una stringa classica relativistica che portano alla definizione delle  $D_p$ -brane e per finire si sono impiegate le conoscenze acquisite con una prima applicazione nello spazio di De Sitter. In questa applicazione si è ricavata l'azione di Nambu-Goto per una stringa chiusa classica relativistica e da quest'ultima la hamiltoniana che, nel caso in cui il raggio sia costante nel tempo, risulta essere una quantità conservata durante il moto della stringa.

Il naturale sviluppo degli argomenti trattati fino ad ora sarebbe la quantizzazione di una stringa, sia aperta sia chiusa, in modo da ottenere lo spettro energetico vibrazionale della stessa e mostrare come al suo interno sia contenuto il gravitone. Imponendo poi la condizione di invarianza sotto trasformazioni di Lorentz, si arriverebbe a mostrare che lo spazio-tempo deve essere a 26 dimensioni; a questo punto è fondamentale l'utilizzo della compattificazione dimensionale così da poter ridurre il numero di dimensioni al numero ordinario.

Quanto esposto sullo spazio di De Sitter e sulla teoria delle stringhe nella sezione 4.2, assieme a numerosi sviluppi, può essere considerato come un primo semplicistico modello di universo primordiale. In queste condizioni la relatività generale non riesce a dare risposte soddisfacenti: è necessaria una teoria della gravità quantistica come la teoria delle stringhe.

Gli stati quantistici della gravità, in teoria delle stringhe, emergono dalla quantizzazione delle stringhe chiuse, mentre i campi di Maxwell da stringhe aperte. Poiché non ci sono evidenze sperimentali, su nessuna scala, di andamenti differenti da  $\frac{1}{r^2}$  per la forza di Coulomb, si ipotizza che le stringhe che danno origine ai campi maxwelliani siano vincolate a muoversi su una  $D_3$ -brana, il nostro spazio tridimensionale, che altro non sarebbe che un spazio tangente ad un universo con un maggior numero di dimensioni. D'altro canto, non essendo le stringhe chiuse vincolate a nulla, la gravità potrebbe presentare un comportamento con dipendenza da  $r$  differente dalla legge di Newton alle brevi distanze (distanze comparabili con il raggio delle dimensioni extra compatte).

Naturalmente, quanto esposto è parte di una teoria ancora giovane ed in fase di sviluppo, che dovrà assestarsi costruendosi un'architettura consistente con quanto è noto fino ad ora sull'universo e superando molte prove di validità che potrebbero smentirla o farla divenire di diritto la teoria del tutto.



## Appendice A

# Richiami di relatività ristretta

La teoria della relatività ristretta si basa su due postulati fondamentali:

- Le leggi fisiche sono le stesse in tutti i sistemi di riferimento inerziali;
- La velocità della luce nel vuoto è uguale, in modulo, in tutti i sistemi di riferimento.

La struttura matematica della relatività ristretta è basata sullo spazio-tempo di Minkowski, la cui metrica  $g_{\mu\nu}$  differisce dall'usuale metrica euclidea e i termini non nulli sono

$$g_{00} = 1; \quad g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1. \quad (\text{A.1})$$

E' possibile definire la metrica inversa  $g^{\mu\nu}$  come inversa della matrice  $g_{\mu\nu}$ .

Definendo il quadrivettore posizione  $x^\mu = (ct, x^1, x^2, x^3)$  la distanza infinitesima nello spazio di Minkowski è

$$ds^2 = - \sum_{i=1}^{i=3} dx_i^2 + c^2 dt^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (\text{A.2})$$

e rappresenta l'intervallo spazio-temporale. I quadrivettori  $x_\mu$  e  $x^\mu$  non sono uguali: quello con indice in basso è detto covariante mentre quello con indice in alto controvariante; il passaggio da uno all'altro si effettua tramite contrazione di indice mediante la metrica,

$$x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu; \quad x^\nu = g^{\mu\nu} x_\mu. \quad (\text{A.3})$$

La differenza tra un vettore covariante ed uno controvariante è dettato dalla metrica; nel caso dello spazio di Minkowski, con la metrica (A.1), la differenza sta in un cambio di segno delle componenti spaziali.

A partire dalla metrica (A.1) si definisce la norma quadra di un generico quadrivettore

$$||A^\mu||^2 = A^\mu A_\mu = g_{\mu\nu} A^\mu A^\nu = (A^0)^2 - \sum_i (A^i)^2, \quad (\text{A.4})$$

in cui l'indice  $i$  corre da 1 a 3 e risulta non definita positiva. A seconda del valore delle componenti definiamo il tipo di quadrivettore

$$A^\mu = \begin{cases} tempo & \text{se } (A^0)^2 > \sum_i (A^i)^2 \\ spazio & \text{se } (A^0)^2 < \sum_i (A^i)^2 \\ luce & \text{se } (A^0)^2 = \sum_i (A^i)^2 \end{cases}. \quad (\text{A.5})$$

Definiamo trasformazione di Lorentz una trasformazione lineare delle coordinate, ossia

$$x'^\mu = L^\mu_\nu x^\nu, \quad (\text{A.6})$$

che nel passare da un sistema ad un altro mantenga l'intervallo infinitesimo invariato:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = ds'^2 = g_{\alpha\beta} L_\gamma^\alpha dx^\gamma L_\delta^\beta dx^\delta = g_{\alpha\beta} L_\gamma^\alpha L_\delta^\beta dx^\gamma dx^\delta \quad (\text{A.7})$$

quindi

$$g_{\mu\nu} = g_{\alpha\beta} L_\gamma^\alpha L_\delta^\beta \Rightarrow L^T g L = g. \quad (\text{A.8})$$

Una trasformazione di Lorentz è una qualunque matrice che soddisfi la (A.8); queste trasformazioni conducono ai fenomeni di dilatazione temporale e contrazione delle lunghezze. In relatività ristretta il tempo non è assoluto ma dipende dal sistema in cui ci si trova; tuttavia è possibile definire un tempo (il tempo proprio) che è invariante ristretto alle trasformate di Lorentz, ossia è lo stesso per tutti gli osservatori. Il tempo proprio è il tempo misurato in un sistema di riferimento solidale con il fenomeno di cui si sta misurando la durata; in questo sistema un oggetto, che sia in moto o meno rispetto ad altri sistemi di riferimento, risulta in quiete e pertanto  $ds^2 = c^2 d\tau^2$ , ma essendo l'intervallo spazio-tempo un invariante relativistico si ha che

$$c^2 d\tau^2 = c^2 dt^2 - \sum_i dx_i^2 \Rightarrow d\tau = dt \sqrt{1 - \frac{\sum_i dx_i^2}{dt^2 c^2}} = dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{dt}{\gamma}, \quad (\text{A.9})$$

in cui  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$  è detto fattore di Lorentz.

Possiamo definire ora i quadri-vettori velocità ed impulso

$$v^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dt}{dt} = \gamma \frac{dx^\mu}{dt} = (\gamma c, \gamma \vec{v}), \quad (\text{A.10})$$

da cui

$$p^\mu = m v^\mu = (m\gamma c, m\gamma \vec{v}). \quad (\text{A.11})$$

Notiamo che la zeresima componente di  $p^\mu$  se moltiplicata per  $c$  ha le dimensioni di un'energia e che se sviluppiamo il fattore di Lorentz (piccole velocità, ossia nel limite classico) otteniamo

$$E = m\gamma c^2 \approx mc^2 + \frac{1}{2}mv^2, \quad (\text{A.12})$$

che restituisce il giusto limite a parte una costante additiva secondo la quale un corpo possiede energia per il solo fatto di avere una massa.

## Appendice B

# La delta di Dirac

La delta di Dirac è una funzione generalizzata che assume il valore infinito in un solo punto e zero altrove

$$\delta(x - x_0) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \neq x_0 \\ \infty & \text{se } x = x_0 \end{cases}. \quad (\text{B.1})$$

Fu introdotta dal fisico, Nobel nel 1933, Paul Adrien Maurice Dirac per questioni di normalizzazione delle funzioni d'onda dello spettro continuo. La delta può essere definita come il limite di una gaussiana la cui varianza tende a zero; intuitivamente se la varianza tende a zero la gaussiana si stringe sempre più e diventa infinitamente alta in un solo punto (la media della gaussiana). La proprietà fondamentale della delta di Dirac è che

$$\int_{\mathcal{R}} f(x)\delta(x - x_0) dx = f(x_0). \quad (\text{B.2})$$

La delta di Dirac possiede anche una rappresentazione integrale, la sua trasformata di Fourier deve essere una funzione con grandezza caratteristica infinitamente grande (la delta ha grandezza caratteristica infinitamente piccola; un punto) quindi

$$\mathcal{F}(\delta(x)) = \int \delta(x)e^{ikx} dx = 1, \quad (\text{B.3})$$

in cui  $\mathcal{F}(\cdot)$  indica la trasformata di Fourier. Antitrasformando, otteniamo

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int 1e^{-ikx} dk. \quad (\text{B.4})$$

La delta di Dirac gode delle seguenti proprietà:

- riscalamento  $\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x)$ ;
- parità  $\delta(x) = \delta(-x)$ ;
- prodotto per una funzione  $f(x) \in C^\infty$   $f(x)\delta(x - x_0) = f(x_0)\delta(x - x_0)$ ;
- composizione  $\delta(f(x)) = \sum_k \frac{\delta(x-x_k)}{|f'(x_k)|}$ ;
- proprietà fondamentale espressa dalla (B.2).



## Appendice C

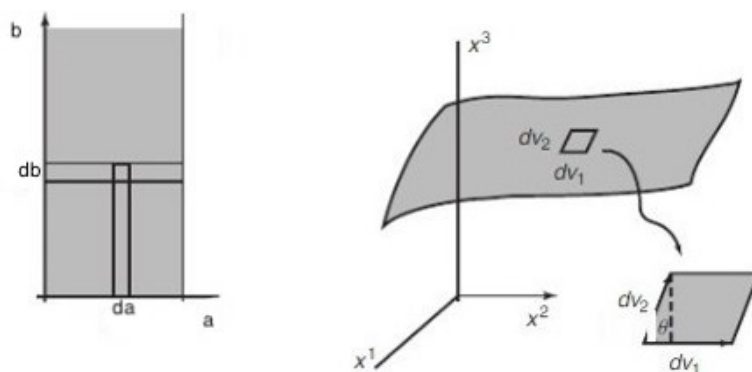
# Funzionale di area per superfici nello spazio euclideo

Per descrivere una superficie abbiamo bisogno di due parametri che chiameremo  $a$  e  $b$ , e di una mappa vettoriale che ad ogni punto dello spazio di parametrizzazione, lo spazio bidimensionale  $(a, b)$ , associa un punto della superficie in esame

$$(a, b) \longrightarrow (X_1(a, b), \dots, X_d(a, b)). \quad (\text{C.1})$$

La regolarità della mappa è garantita dalla richiesta che il rango della matrice jacobiana sia massimo

$$\text{Rk} \begin{bmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial a} & \dots & \frac{\partial X_d}{\partial a} \\ \frac{\partial X_1}{\partial b} & \dots & \frac{\partial X_d}{\partial b} \end{bmatrix} = 2. \quad (\text{C.2})$$



**Figura C.1.** A sinistra, spazio di parametrizzazione. A destra, superficie immersa nello spazio euclideo. Ogni rettangolo nello spazio  $(a, b)$  diventa un quadrilatero generico.

In generale ogni rettangolo infinitesimo nello spazio  $(a, b)$  verrà mappato in un quadrilatero di lati  $dv_1$  e  $dv_2$ , come in Figura C.1. Il differenziale di un generico vettore  $\vec{X}(a, b)$  può essere scritto come

$$d\vec{X} = \frac{\partial \vec{X}}{\partial a} da + \frac{\partial \vec{X}}{\partial b} db, \quad (\text{C.3})$$

inoltre i vettori  $dv_1$  e  $dv_2$  sono rispettivamente le immagini dei vettori  $(da, 0)$  e  $(0, db)$  per cui

$$dv_1 = \frac{\partial \vec{X}}{\partial a} da; \quad dv_2 = \frac{\partial \vec{X}}{\partial b} db. \quad (\text{C.4})$$

Sfruttando la formula per l'area di un parallelogramma si può determinare l'area del generico quadrilatero sulla superficie

$$dA = |d\vec{v}_1||d\vec{v}_2|\text{sen}(\theta) = \sqrt{|d\vec{v}_1|^2|d\vec{v}_2|^2 - |d\vec{v}_1|^2|d\vec{v}_2|^2\cos^2(\theta)}, \quad (\text{C.5})$$

in cui  $\theta$  è l'angolo tra i due vettori e si è utilizzata la relazione trigonometrica fondamentale. Esprimendo la (C.5) mediante il prodotto scalare euclideo otteniamo

$$dA = \sqrt{(d\vec{v}_1 \cdot d\vec{v}_1)(d\vec{v}_2 \cdot d\vec{v}_2) - (d\vec{v}_1 \cdot d\vec{v}_2)^2}. \quad (\text{C.6})$$

Grazie alle (C.4) ed integrando

$$A = \int dadb \sqrt{\left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial a} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial a}\right)\left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial b} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial b}\right) - \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial a} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial b}\right)^2}. \quad (\text{C.7})$$

La positività del radicando è diretta conseguenza della disuguaglianza di Schwarz.



# Bibliografia

- [1] Barton Zwiebach, "A first course in string theory", Cambridge university press, 2018.
- [2] Maurizio Gasperini, "Manuale di relatività ristretta", Springer, 2010.
- [3] Vincenzo Barone, "Relatività. Principi e applicazioni", Bollati Boringhieri, 2004.